Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
18.11.2009

Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

5. Übung

Präsenzaufgaben

G14 (Komplexe Zahlen)

i) Berechne Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument:

$$\left(\frac{2+i}{1-\overline{1+i}^2}\right)^9; \quad (\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}))^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

ii) Gegeben sei das Polynom $p(z) = z^4 + 16$. Bestimme alle reellen bzw. alle komplexen Nullstellen dieses Polynoms.

iii) In den reellen Zahlen gilt $0 < 1$. Gilt in den komplexen Zahlen $0 < i$? Was hat das für Konsequenzen für $\mathbb{C}$?

iv) Berechne die Überlagerung folgender Schwingungen mit Hilfe der komplexen Darstellung:

$$1) \quad \sqrt{2}\cos(\pi t + \frac{\pi}{4}) + \cos(-\pi t + \frac{\pi}{2}), \qquad 2) \quad 2\sin(\frac{\pi}{3}t + 2\pi) + 3\sin(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}) .$$

G15 (Kombinatorik)

i) Auf wieviele Arten kann man 7 Hotelgäste in 10 freien Einzelzimmern unterbringen?

ii) Ein Bit kann zwei Zustände (0 oder 1) annehmen. Ein Byte besteht aus 8 Bits (z.B. 10101110). Wieviele verschiedene Bytes gibt es?

iii) In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wieviele Arten der Beleuchtung gibt es?

iv) Berechne, wieviele Möglichkeiten der Anordnung es für
   (1) 4 unterschiedlich farbige Kugeln gibt,
   (2) m schwarze und 1 weiße Kugel gibt.

G16 (Kombinatorik)

Verwende vollständige Induktion, um den folgenden Satz aus der Vorlesung zu zeigen:

Satz. *Sei $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ eine Menge mit n Elementen. Dann gibt es $\binom{n}{k}$ verschiedene Teilmengen von A mit k Elementen, $k \leq n$.*

Hausaufgaben

H15 (Komplexe Zahlen) **(1+1 Punkte)**

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

i) $z^3 = \sqrt{3} + 3i$ und

ii) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

H16 (Polynome) **(1+1 Punkte)**

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Beweise die folgenden Aussagen:

i) Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullsstelle von p, so ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p.

ii) Hat p eine ungerade Anzahl von Nullstellen, so ist mindestens eine davon eine reelle Nullstelle.

Kommentar: Tatsächlich hat nach dem *Fundamentalsatz der Algebra* (vgl. später in der Vorlesung) jedes Polynom vom Grade d genau d komplexe Nullstellen. Also hat nach dieser Aufgabe jedes Polynom mit reellen Koeffizienten, das einen ungeraden Grad hat, mindestens eine reelle Nullstelle.

H17 (Schwingungen) **(1+1 Punkt)**

Die drei Spannungen einer Drehstromleitung sind

$$R = U\sin(\omega t), \quad S = U\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}), \quad T = U\sin(\omega t + \frac{4\pi}{3}) \ ,$$

wobei U die Amplitude und ω die Frequenz bezeichnet.

i) Wie lauten diese Spannungen in komplexer Darstellung? Zeige $R + S + T = 0$.

ii) Bestimme Amplitude, Frequenz und Phase von $S - R, T - S$ und $R - T$.

H18 (Kombinatorik) **(1+1+1 Punkte)**

i) Seien A und B zwei endliche Mengen mit m bzw. n Elementen ($m \leq n$). Wieviele injektive Abbildungen $f\colon A \to B$ gibt es?

ii) In einem Regal stehen 5 französische, 7 spanische und 11 englische Bücher. Auf wieviele Arten lassen sich zwei Bücher in verschiedenen Sprachen auswählen?

ii) Herr Reichlich stirbt unerwartet und nimmt das Codewort zu seinem Tresor mit ins Grab. Seine Angehörigen wissen nur, daß der Code 5-stellig ist und genau 3 Ziffern enthält, unter denen die Ziffern 0 und 4 nicht vorkommen. Wieviele Codewörter erfüllen diese Bedingung?