Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
11.11.2009

Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

4. Übung

Präsenzaufgaben

G11 (Trigonometrische Funktionen)

Verwende die Additionstheoreme von Sinus und Cosinus zum Beweis von

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - (\tan x) \cdot (\tan y)}, \qquad \text{für } (\tan x) \cdot (\tan y) \neq 1.$$

G12 (Die Überlagerung)

Es seien $A, \omega \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ nennt man *Sinusschwingung* mit *Amplitude* A, *Kreisfrequenz* ω und *Phase(nverschiebung)* φ. Ein Oszilloskop erzeugt aus den beiden Eingangsschwingungen f_1 und f_2 mit

$$f_1(t) = \sqrt{2}\cos(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{4}), \quad f_2(t) = \sqrt{2}\sin(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{4}), \quad t \in \mathbb{R}$$

das Bild der Überlagerung $g(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

i) Mache dir die Bedeutung von A, ω und φ für den Graphen der Sinusschwingung klar und erkläre so die Namen dieser drei Größen.

ii) Zeige, daß f_1 und g ebenfalls Sinusschwingungen sind.

iii) Bestimme jeweils die Größen A, ω und φ in den Darstellungen von f_1 und g als Sinusschwingungen und skizziere den Graphen von g.

G13 (Komplexe Zahlen)

Es seien $z = 1 + 2i$ und $w = 3 - i$ gegeben.

i) Skizziere z, w und $\overline{z}$, $\overline{w}$ in der komplexen Zahlenebene.

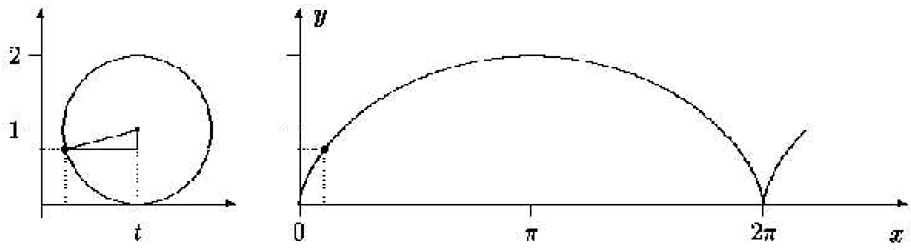
ii) Berechne $z + w$, $z \cdot w$, $\frac{z}{w}$ sowie $|z|$, $|w|$ und $\arg z$, $\arg w$.

iii) Zeige, daß die komplexe Zahl $\frac{1+it}{1-it}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ den Betrag 1 hat.

Hausaufgaben

H12 (Zykloide) **(2x1 Punkt)**

Auf einem Rad vom Radius 1 sei auf dem Rand ein Punkt markiert, der sich zu Beginn am Aufliegepunkt des Rades befinde. Während das Rad rollt, bewegt sich der Punkt auf der Rollkurve, auch Zykloide genannt (vgl. Bild).



i) Rechne nach, daß der markierte Punkt sich an der Stelle mit den Koordinaten $(t-\sin t, 1-\cos t)$ befindet, wenn das Rad t Meter weit gerollt ist.

ii) Stelle für $y \in [0,2]$ die x-Koordinate in Abhängigkeit von der y-Koordinate dar.

H13 (Komplexe Zahlen) **(3x1 Punkte)**

i) Skizziere die folgenden Zahlen in der komplexen Zahlenebene:

$$1+i, \quad \sqrt{3}-i, \quad (1+\sqrt{-3})^2, \quad \frac{(1-i)^3-1}{(1+i)^5+1}, \quad \sum_{k=1}^{5} i^k \ .$$

ii) Berrechne für $z = \frac{(1-i)^3-1}{(1+i)^5+1}$ Betrag $|z|$ und Argument $\arg z$.

iii) Skizziere in der komplexen Ebene jeweils alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$|z| \leq 1, \quad |z| > 2, \quad 0 < Re(iz) < 1, \quad |z+1-i| \leq 2, \quad |z+1| = |z-1|, \quad |1+z| < |i+z| \ .$$

H14 (Möbiustransformation) **(1+1+2 Punkt)**

i) Beschreibe für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ die Menge $\{z \in \mathbb{C} \colon \overline{(z-z_0)}(z-z_0) = r^2\}$ geometrisch.

ii) Zeige, daß jeder Kreis in der komplexen Ebene in der Form

$$\overline{z}z - \overline{a}z - a\overline{z} + b = 0$$

für $b \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{C}$ geschrieben werden kann.

iii) Betrachte das durch die Geraden $x+d=0,\ d \in \mathbb{Z}$ und $y+id=0,\ d \in \mathbb{Z}$ gegebene Gitter in der komplexen Ebene. Zeigen Sie, daß die Gitterlinien mit $d \neq 0$ durch die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{1}{z}$$

auf Kreise abgebildet werden.