Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
04.11.2009

Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

3. Übung

Präsenzaufgaben

G08 (Graphen)

Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen:

$$\text{i)}\quad f(x) = \frac{1}{|x-2|},\ D(f) = \mathbb{R}\backslash\{2\}; \qquad \text{ii)}\quad f(x) = |4x^2 - 4|x| + 1|,\ D(f) = \mathbb{R}\ .$$

G09 (Polynome)

i) Führe die folgenden Polynomdivisionen mit Hilfe des Hornerschemas durch

$$(x^6 - 64) : (x-2), \qquad (x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4) : (x+2)\ .$$

ii) Berechne für das Polynom $p(x) = x^2 - 12345678x - 12345678$ den Wert $p(12345679)$

i) mit dem Taschenrechner ii) mit dem Hornerschema.

Welcher Wert ist der richtige? Was ist passiert?

G10 (Spezielle reelle Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0, \infty)$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}.$$

i) Skizziere die Funktion f.

ii) Zeige, daß die Funktion f streng monoton fallend ist.

iii) Zeige, daß $\sup_{x \in D(f)} f(x) = 2$ ist. Besitzt f ein Maximum?

iv) Zeige, daß $\inf_{x \in D(f)} f(x) = 1$ ist. Besitzt f ein Minimum?

G11 (Umkehrfunktion)

Seien zwei bijektive Funktionen $f\colon Y \to Z$ und $g\colon X \to Y$ gegeben mit $B(g) \subset D(f)$. Zeige, daß dann für die Umkehrfunktion der verketteten Funktion $f \circ g$ gilt:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}\ .$$

Hausaufgaben

H09 (Polynome) **(1+1 Punkte)**

i) Das Polynom $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Berechne die anderen zwei Nullstellen des Polynoms mit Hilfe des Hornerschemas.

ii) Sei p ein reelles Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Zeige mit Hilfe des Identitätsatzes für Polynome: Gilt $p(k+1) = 1 - p(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist p das konstante Polynom $p(x) = \frac{1}{2}$.

H10 (Spezielle reelle Funktionen) **(6x1 Punkt)**

Gegeben seien die Funktionen $p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$p(x) = \sqrt{x}, \quad q(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{2}, \quad \text{mit } D_p = [0, \infty),\ D_q = [1, \infty)\ .$$

i) Zeige: q ist streng monoton wachsend.

ii) Skizziere die Graphen von p und q.

iii) Bestimme die Bildmengen $B(p)$ und $B(q)$ von p und q.

iv) Bestimme die Umkehrfunktionen p^{-1} und q^{-1} und skizziere diese.

v) Stelle die Funktion

$$r(x) := \frac{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^{-1}}{2}$$

mit Hilfe einer Verkettung der Funktionen p und q dar.

vi) Bestimme die Umkehrfunktion dieser Verkettung und skizziere diese.

H11 (Gerade und ungerade Funktionen) **(5x1 Punkt)**

i) Zeige, daß die Funktion $f(x) := |x|$ gerade und die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & , \text{ für } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & , \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

ungerade ist.

ii) Sei $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Zeige, daß p weder gerade noch ungerade ist.

iii) Schreibe das Polynom p als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u:

$$p(x) = g(x) + u(x)\ .$$

iv) Zeige, daß $p(x) + p(-x)$ eine gerade Funktion und $p(x) - p(-x)$ eine ungerade Funktion ist.

v) Zeige: Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als

$$f(x) = g(x) + u(x),$$

wobei g eine gerade Funktion und u eine ungerade Funktion ist.