Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
28.10.2009

Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

2. Übung

Präsenzaufgaben

G05: (Vollständige Induktion)

Zeige mittles vollständiger Induktion:

i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}$,

ii) $\prod_{k=1}^{n} k^k < n^{(\frac{n(n+1)}{2})},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

G06: (Mengen in $\mathbb{R}^2$)

Skizziere die Menge $M = M_1 \backslash (\cup_{i=2}^{5} M_i)$, wobei

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 36\}\,,$$
$$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [-3,3],\ \frac{2}{9}x^2 - 4 < y < \frac{1}{9}x^2 - 3\}\,,$$
$$M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < y < -|x|\}\,,$$
$$M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y) = (\hat{x}+2, \hat{y}+2),\ (\hat{x},\hat{y}) \in M_3\}\,,$$
$$M_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y) = (\hat{x}-2, \hat{y}+2),\ (\hat{x},\hat{y}) \in M_3\}\,.$$

G07: (Abbildungen)

Skizziere die folgenden Relationen und bestimme, welche davon Abbildungen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ darstellen. Gib für sämtliche Abbildungen f die Definitionsmenge $D(f)$ und die Bildmenge $B(f)$ an. Bestimme, welche von den Abbildungen injektiv sind und skizziere für diese die Umkehrabbildungen.

a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| = 4\}$,

b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 2x\}$,

c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = -x^2 - x\}$,

d) $R_4 = \{(1,1), (2,4), (3,2)\}$.

Hausaufgaben

H05: (Vollständige Induktion) **(1+1 Punkte)**

Zeige mittles vollständiger Induktion

i) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,\ n \in \mathbb{N}$,

ii) $n^3 > 3n+3,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$.

H06: (Mengen in $\mathbb{R}^2$) **(2 Punkte)**

Skizziere die Menge $M = M_1 \backslash (M2 \cup (M_3 \backslash M_4))$, wobei

$$\begin{aligned}
M_1 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq \begin{cases} (x+3)^2 & ,\ x \in [-3,0] \\ (x-3)^2 & ,\ x \in [0,3] \end{cases} \} \\
M_2 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \}\,, \\
M_3 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{5}{2} < y < -4|x| + 6\}\,, \\
M_4 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R},\ \frac{7}{2} < y < 4\}\,.
\end{aligned}$$

H07: (Abbildungen) **(4x1 Punkt)**

Skizziere die folgenden Relationen und bestimme, welche davon Abbildungen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ darstellen. Gib für sämtliche Abbildungen f die Definitionsmenge $D(f)$ und die Bildmenge $B(f)$ an. Bestimme, welche von den Abbildungen injektiv sind und skizziere für diese die Umkehrabbildungen.

a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = |y|\}$,

b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \begin{cases} 1 & ,\ x \geq 0 \\ -1 & ,\ x < 0 \end{cases} \}$,

c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 1,\ y \in \mathbb{R}\}$,

d) $R_4 = \{(1,2),(2,1),(3,3),(4,0)\}$.

H08 (Die De Morgansche Regeln) **(2 Punkte)**

Seien $A, B \subset G$ Teilmengen einer beliebigen Grundmenge G. Zeige, daß die folgenden Regeln gelten:

i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.