Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
21.10.2009

Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

1. Übung

Präsenzaufgaben

G01: (Dezimalbruch)

i) Gib die Dezimaldarstellung der folgenden Brüche an: $\frac{17}{60}$, $\frac{113}{88}$.

ii) Wandle (sofern möglich) die folgenden Dezimalbrüche in Brüche um: 2.83, $0.\overline{728}$.

G02: (Supremum-Infimum)

Gegeben sind die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

$$\begin{array}{ll} 11x = 7x - 4\,, & |4x+5| = 3 \\ x^2 - 3x - 18 \geq 0\,, & |x+3| + |x+1| < 10\,. \end{array}$$

i) Bestimme die Lösungsmenge dieser (Un-)Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen). Bestimme danach das Supremum und das Infimum dieser Mengen.

ii) Mache dir klar, wie sich die Lösungsmenge ändert, wenn man
   * $x \in \mathbb{Q}$ (Menge der rationalen Zahlen),
   * $x \in \mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen),
   * $x \in \mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen) voraussetzt.

G03: (Vollständige Induktion)

Beweise die folgende Formel mittels vollständiger Induktion:

$$n^2 > 2n + 1, \quad n \geq 3\,.$$

G04: (Folgerung aus den Anordnungsaxiomen und dem Vollständigkeitsaxiom)

Sei $q \in \mathbb{R}$. Zeige:

i) Ist $q > 1$, so gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $q^n > K$.

ii) Ist $0 < q < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $q^n < \varepsilon$.

Verwende die Bernoullische Ungleichung (siehe Vorlesung und Buch[1]), um die Behauptung i) zu zeigen und folgere daraus dann ii).

---
[1] v. Finckenstein, *Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure I*

Hausaufgaben

H01: (Dezimalbruch)

i) Gib die Dezimaldarstellung der folgenden Brüche an: $\frac{3}{7}$, $\frac{256}{999}$.

ii) Wandle (sofern möglich) die folgenden Dezimalbrüche in Brüche um: $1.1\overline{41}$, $3.1415 - \sqrt{2}$.

H02: (Supremum-Infimum)

Bestimme jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die den folgenden Ungleichungen genügen:

i) $\frac{1}{2}(x+6) \geq |x+4|$

ii) $\frac{3+|x+1|}{|x-1|} < 2$.

Berechne das Supremum und das Infimum der entsprechenden Lösungsmengen.

H03: (Vollständige Induktion)

Beweise die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{(n+1)}}{1-x} , \quad n \in \mathbb{N},\ x \neq 1 .$$

H04: (Archimedisches Axiom)

Gilt in einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ - in unserem Fall ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ - das Vollständigkeitsaxiom, ist es streng genommen überflüssig, $\mathbb{K}$ auf das Archimedische Axiom hin zu untersuchen. Denn letzteres ist eine Folgerung aus ersterem.

Folgere für den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aus dem Vollständigkeitsaxiom, daß das Archimedische Axiom bereits gilt. Das heißt, zeige, daß gilt:

Zu $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < x$, $0 < y$ *existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \cdot x > y$.