Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

6. Übung

Präsenzaufgaben

G17 (ε-Kriterium)

$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}\ .$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|a_n - a| = \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2(2n+1) > \tfrac{1}{\varepsilon} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\ . \tag{1}$$

Wir wählen $n_0 > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, z.B. den aufgerundeten Wert von $\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ auch $n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$ und damit nach (1)

$$|a_n - a| < \varepsilon\ .$$

Wir haben somit gezeigt, dass $(a_n - \frac{1}{2})_n$ eine Nullfolge ist, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. Zeige ausführlich, daß die durch

$$a_n := \frac{n}{2n+1}$$

gegebenen Folge $(a_n)_n$ den Grenzwert $a = \frac{1}{2}$ besitzt, d.h. weise anhand der Definition nach, daß $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist. Geben Sie insbesondere für jedes $\varepsilon > 0$ ein entsprechendes n_0 an.

G18 (Folgen I)

(i) • $a_n = 2n - 1 \quad \Rightarrow$ „$\lim_{n\to\infty} a_n \to \infty$"

a_n ist nicht beschränkt (divergent)

• $b_n = \frac{3n^2+7}{13n} = \frac{3n^2}{13n} + \frac{7}{13n} = \overset{\to\infty}{\frac{3n}{13}} + \overset{\to 0}{\frac{7}{13n}}$

divergent

• $c_n = \frac{2n^2+2n+4}{4n^4+3} = \frac{n^4\left(\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\frac{4}{n^4}\right)}{n^4\left(4+\frac{3}{n^4}\right)} = \frac{\overset{\to 0}{2/n^2} + \overset{\to 0}{2/n^3} + \overset{\to 0}{4/n^4}}{4 + \underset{\to 0}{3/n^4}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

konvergent gegen $c = 0$

• $d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1000} = \left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \rightsquigarrow$ konvergent, $d = 1$

(beachte den Unterschied zur e-Reihe, dort gibt es <u>unendlich</u> viele Faktoren $1+\frac{1}{n}$, und dieser Trick funktioniert nicht!)

(ii) • $a_n = 2^n$ ist divergent

• $b_n = \frac{1}{3^n} \to 0$ ist konvergent ($b = 0$)

• $c_n = \frac{3^n+1}{3^{2n}-1} = \frac{3^n+1}{(3^n+1)(3^n-1)} = \frac{1}{3^n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ konvergent ($c = 0$)

(iii) • $a_n = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{}$ „∞" divergent

• $b_n = \frac{2}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ konvergent ($b = 0$)

• $c_n = \sqrt[n]{23} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (siehe Info auf Übungsblatt)
konvergent gegen $c = 1$

G19 (Selbstgebaute Beispiele)

(i) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$; $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} = a_n$, $a_n \to 1$

(ii) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} = a_n$, $a_n \to 1$

und $a_1 = 2$, $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, \ldots$

(hier ist $n=0$ ausgeschlossen!)

(iii) $a_n = (-1)^n$; $-1 \leq a_n \leq +1$, $a_1 = -1$, $a_2 = +1$, $a_3 = -1$ usw.

(iv) $a_n = \frac{1}{n}(-1)^n$; $-1 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$,

$a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$ usw.

G20 (Folgen II)

$$\begin{aligned} a_n =& \sqrt{2n^2+7} - n \\ \Rightarrow& \frac{(\sqrt{2n^2+7}-n)(\sqrt{2n^2+7}+n)}{\sqrt{2n^2+7}+n} = \frac{2n^2+7-n^2}{\sqrt{2n^2+7}+n} = \frac{n^2+7}{\sqrt{2n^2+7}+n} \\ =& \frac{n(n+\frac{7}{n})}{n(\sqrt{2+\frac{7}{n^2}}+1)} = \frac{n+\frac{7}{n}}{\sqrt{2+\frac{7}{n^2}}+1} \to \infty \end{aligned}$$

a_n ist divergent!

Mit dem selben Erweiterungstrick ergibt sich: $\lim_{n\to\infty} b_n = -\frac{1}{2}$ und c_n divergent.

Hausaufgaben

H19 (ε-Kriterium) **(2 Punkte)**

z.z.: a_n ist eine Nullfolge, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \geq n : |a_n - 0| < \varepsilon$.

Betrachte:

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &= |\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \underset{4}{=} \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

siehe auch Hinweis zu (P23)

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Jetzt Bestimmung von n_0:

$\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ genau dann, wenn $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$.

Deshalb wähle für $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß $n_0 > \frac{4}{\varepsilon^2}$.

Daraus folgt, daß ε-Kriterium erfüllt und a_n eine Nullfolge

H21 (Folgen II) **(2 Punkte)**

Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ und somit

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}\ .$$

Für die Montonie ergibt sich wegen $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ dann

$$a_{n+1} = \frac{1+\frac{1}{n+1}}{2} \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $(a_n)_n$ ist monoton fallend. Für die Konvergenz der Folge ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \tfrac{1}{2}\ .$$

H20 (Folgen I) **(1 + 1Punkt)**

$$a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \underset{4}{=} \frac{n+\sqrt{n} - n}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}$$

siehe Hinweis P(23)

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1}$$

$$\lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Beachte das hier die Rechenregeln für Summen und Quotienten von Folgen eingehen.

$$b_n = \frac{5n^3 - 3n^2 + 1}{(2n+1)^3} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n = \frac{5n^3 + 3n^2 + 1}{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n$$

$$= \frac{5 + 3\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{8 + 12\frac{1}{n} + 6\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n = \frac{5 + 3\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{8 + 12\frac{1}{n} + 6\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \left(\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n$$

Daher gilt:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{5}{8} \cdot \frac{e^{-2}}{e^2} = \frac{5}{8} \cdot e^{-4}$$

H22 (Eine rekursive Folge) **(0 + 2 + 2 + 2 Punkte)**

ii) Induktionsanfang: $n = 0$

$$2 = x_0 \in [1, 2]$$

Wir nehmen $x_n \in [1, 2]$ an.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Es gilt $\frac{1}{2} \leq \frac{x_n}{2} \leq 1$ und $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x_n} \leq 1$ und es folgt

$$1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \leq \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \leq 1 + 1 = 2 ,$$

d.h. $x_{n+1} = \frac{x_2}{2} + \frac{1}{x_n} \in [1, 2]$.

iii) Wir nehmen an, dass die Folge $(x_n)_n$ einen Grenzwert $g := \lim_n x_n$ besitzt. Für diesen Grenzwert gilt dann mit Hilfe der Grenzwertsätze

$$g^2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} x_n x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2}x_n^2 + 1) = \tfrac{1}{2}g^2 + 1 ,$$

also $g^2 = 2$. Als Grenzwerte für die Folge $(x_n)_n$ kommen damit nur $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ in Frage. Da wir zuvor schon gesehen haben, dass x_n stets im Intervall $[1, 2]$ liegt, bleibt nur $\sqrt{2}$ als möglicher Grenzwert.

iv) Wir zeigen zuerst, dass y_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ positiv ist. Für den Startwert $y_0 = 2 - \sqrt{2}$ ist dies erfüllt. Außerdem gilt für alle $n \geq 0$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} = \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} = \frac{y_n^2}{2x_n} . \qquad (2)$$

Der Zähler dieses Bruches ist als Quadrat positiv und der Nenner ist positiv, da x_n für alle $n \in \mathbb{N}$ im Intervall $[1, 2]$ liegt. Somit ist y_{n+1} positiv.

Wir zeigen nun, dass die Folge $(y_n)_n$ monoton fallend ist. Wir betrachten dazu weiter Gleichung (2). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nun $0 \leq y_n \leq x_n$ und somit

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2x_n} \leq \frac{y_n^2}{2y_n} = \tfrac{1}{2}y_n \leq y_n .$$