Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
18.11.2009

Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

5. Übung

Präsenzaufgaben

G14 (Komplexe Zahlen)

i) $z = \frac{2+i}{1-\overline{1+i}^2} = \frac{4}{5} - i\frac{3}{5} = |z|e^{i\arg|z|} \simeq 1e^{-i0.64}$ Daher $z^9 = e^{-i9\cdot 0.64}$, $|z^9| = 1$ und $\arg z^9 = -9 \cdot 0.64$.
$z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) \simeq e^{i\frac{\pi}{3}}$. Daher $z^n = e^{i\frac{\Pi}{3}0.523n}$, $|z^n| = 1$ und $\arg z^n = \frac{\Pi}{3}n$.

ii)

Da $z^4 \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt hat p keine reellen Nullstellen.
Zum Auffinden der komplexen Nullstellen schreiben wir $z^4+16=0$ um in

$$z^4 = -16$$

und suchen die Polarkoordinaten von $z = re^{i\varphi}$.
Es muss gelten

$$z^4 = (re^{i\varphi})^4 = r^4 e^{i4\varphi} = -16 = 16 e^{i\pi}$$

Also gilt $r^4 = 16$ und $4\varphi = \pi + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
Damit ist $r = 2$ und $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Das ergibt 4 verschiedene Lösungen für $k = 0, 1, 2$ und 3
nämlich:

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$z_2 = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$z_3 = 2e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$
$$z_4 = 2e^{i\frac{7}{4}\pi} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

Da $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 2$ ist, liegt kein dieser Nullstellen in der Menge aus a)(2).
Im Bild zu a) sieht man, dass z_1 und z_2 in der Menge aus a)(1) liegen, aber z_3 und z_4 nicht. (kann man natürlich auch nachrechnen.)

iii) Angenommen es gelte $0 < i$, dann folgt aus dem Anordnungsaxiom $A13$: $0 \cdot 0 < i \cdot i = -1$ Das ist ein Widerspruch. Die reellen Zahlen sind ein angeordneter Körper, der Körper komplexen Zahlen besitzt keine Ordnung.

iv)

(1) $\sqrt{2}\cos(\pi t + \frac{\pi}{4}) + \cos(-\pi t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}\cos(\pi t + \frac{\pi}{4}) + \cos(\pi t - \frac{\pi}{2})$

(Cosinus ist gerade !)

$= Re(\sqrt{2}\, e^{i\pi t + i\frac{\pi}{4}}) + Re(e^{i\pi t - i\frac{\pi}{2}})$

$= Re(\sqrt{2} e^{i\pi t} e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\pi t} e^{-i\frac{\pi}{2}}) = Re(e^{i\pi t}(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}))$

$= Re(e^{i\pi t}(\sqrt{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}} - i)) = Re(e^{i\pi t}(1 + i - i))$

$= Re(e^{i\pi t}) = Re(\cos(\pi t) + i\sin(\pi t)) = \cos(\pi t).$

(2) $2\sin(\frac{\pi}{3}t + 2\pi) + 3\sin(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(\frac{\pi}{3}t) + 3\sin(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2})$

$= Im(2e^{i\frac{\pi}{3}t} + 3e^{i\frac{\pi}{3}t}e^{i\frac{\pi}{2}}) = Im(e^{i\frac{\pi}{3}t}(2 + 3e^{i\frac{\pi}{2}}))$

$= Im(e^{i\frac{\pi}{3}t}(2+3i)) = Im(e^{i\frac{\pi}{3}t}\sqrt{13}\, e^{i\arg(2+3i)})$

$= \sqrt{13}\, Im(e^{i(\frac{\pi}{3}t + \arccos(-\frac{2}{\sqrt{13}}))})$ (vgl. G13 a) (2))

$= \sqrt{13}\sin(\frac{\pi}{3}t + \arccos(-\frac{2}{\sqrt{13}})).$

G15 (Kombinatorik)

i) Es gibt $\binom{10}{7}$ Möglichkeiten, 7 von 10 Zimmern auszuwählen und 7! Möglichkeiten 7 Hotelgäste in den audgewählten 7 Zimmern zu unterbringen. Daher ist die Antwort $\binom{10}{7}7! = \frac{10!}{3!} = 604800$.

ii) Ein Byte ist eine Zeile, die 8 Einträge enthält. Jeden Eintrag kann entweder den Wert 1 oder 0 annehmen. Daher gibt es 2 Möglichkeiten, den ersten Eintrag auszuwählen, 2 Möglichkeiten für den zweiten u.s.w. Die Antwort ist $2^8 = 256$ Bytes.

iii) Die erste Möglichkeit besteht darin, dass alle Lampen ausgeschaltet sind. Es gibt $\binom{5}{1}$ Möglichkeiten 1 Lampe einzuschalten, $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten 2 Lampen, u.s.w. Insgesamt gibt es $\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} = 2^5$ Arten der Beleuchtung.

iv) 1. Es gibt 4! Permutationen von der Menge aus 4 Elementen.
2. Die Permutation ist durch die Position weißer Kugel definiert. Daher gibt es $m + 1$ Permutationen.

G16 (Kombinatorik)

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach n.

Induktions-Anfang $n = 1$. Die Menge $\{A_1\}$ besitzt genau eine nullelementige Teilmenge, nämlich die leere Menge $\emptyset$, und genau eine einelementige Teilmenge, nämlich $\{A_1\}$. Anderseits ist auch $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. (Übrigens gilt der Satz auch für $n = 0$.)

Induktions-Schritt $n \to n+1$. Die Behauptung sei für Teilmengen der n-elementigen Menge $M_n := \{A_1, \ldots, A_n\}$ schon bewiesen. Wir betrachten nun die k-elementigen Teilmengen von $M_{n+1} := \{A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}\}$. Für $k = 0$ und $k = n+1$ ist die Behauptung trivial, wir dürfen also $1 \leqslant k \leqslant n$ annehmen. Jede k-elementige Teilmenge von M_{n+1} gehört zu genau einer der folgenden Klassen: $\mathcal{T}_0$ besteht aus allen k-elementigen Teilmengen von M_{n+1}, die A_{n+1} nicht enthalten, und $\mathcal{T}_1$ aus denjenigen k-elementigen Teilmengen, die A_{n+1} enthalten. Die Anzahl der Elemente von $\mathcal{T}_0$ ist gleich der Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M_n, also nach Induktions-Voraussetzung gleich $\binom{n}{k}$. Da die Teilmengen der Klasse $\mathcal{T}_1$ alle das Element A_{n+1} enthalten, und die übrigen $k-1$ Elemente der Menge M_n entnommen sind, besteht $\mathcal{T}_1$ nach Induktions-Voraussetzung aus $\binom{n}{k-1}$ Elementen. Insgesamt gibt es also (unter Benutzung des Hilfssatzes)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

k-elementige Teilmengen von M_{n+1}, q.e.d.

Hausaufgaben

H15 (Komplexe Zahlen) **(1+1 Punkte)**

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

i) Sei

$$z^3 = \sqrt{3} + 3i$$

Mit der Formel aus der Vorlesung für $z^n = a$ folgt:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i\left(\frac{\phi + s\pi k}{n}\right)},\ k = 0, \dots, n-1,\ \phi = \arg a$$

Es gilt $|a| = 2\sqrt{3}$, $\phi = \frac{\pi}{3}$ und somit:

$$z_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{\pi/3}{3}},\ z_1 = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{7}{9}\pi},\ z_2 = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{13}{9}\pi}$$

Alternativ mit Polarkoordinaten:
$|a| = 2\sqrt{3}$ und $\phi = \pi/3$, also gilt:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{\pi/3}{3}} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i\pi/9}, \\ z_1 &= \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{2\pi+\pi/3}{3}} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i7\pi/9}, \\ z_2 &= \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{4\pi+\pi/3}{3}} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i13\pi/9} \end{aligned}$$

ii) Sei $x := z^3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{9\pm7}{2}$ Also $x_1 = 8$ und $x_2 = 1$. Wir bestimmen die dritten Wurzeln von x_1 und x_2, $z = \sqrt[3]{x}$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{8} \\ w_{1k} &= \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi k} = 2e^{i\frac{2}{3}\pi k} \\ w_{10} &= 2, \quad w_{11} = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2e^{i120^\circ} = -1 + i\sqrt{3}, \quad w_{11} = 2e^{i\frac{4}{3}\pi} = 2e^{i240^\circ} = -1 - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[3]{1} \\ w_{1k} &= \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi k} = 2e^{i\frac{2}{3}\pi k} \\ w_{10} &= 1, \quad w_{11} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad w_{22} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$L := \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

H16 (Polynome) **1+1 Punkte**

i)

Beh.: Sei p ein Polynom mit reellen Koeffizienten und z_0 eine Nullstelle von p. Dann gilt $p(\overline{z_0}) = 0$.

Bew.: Es ist

$$p(\overline{z_0}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{z_0})^k$$

Nach der Rechenregel $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$ für $z, w \in \mathbb{C}$, gilt

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0^k}$$

Da $a_k \in \mathbb{R}$ ist, gilt $a_k = \overline{a_k}$. Zusammen mit obiger Rechenregel folgt:

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \cdot z_0^k}$$

Schließlich gilt auch $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$ für $z, w \in \mathbb{C}$. Also

$$= \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z_0^k} = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0,$$

da z_0 Nullstelle von p.

Damit ist $p(\overline{z_0}) = 0$.

ii)

Beh: Ist die Anzahl der Nullstellen von p ungerade, so ist mindestens eine Nullstelle von p reell.

Bew: Ist z_0 eine komplexe Nullstelle von p, die nicht reell ist. So ist $\operatorname{Im}(z_0) \neq 0$. Deshalb ist $\bar{z}_0 \neq z_0$. Nach a) ist aber auch $\bar{z}_0$ eine (von z_0 verschiedene) Nullstelle von p. Die nicht-reellen Nullstellen von p treten also immer paarweise auf. Soll die Anzahl der Nullstellen ungerade sein, muss es also eine reelle Nullstelle geben.

H17 (Schwingungen) **(1+1 Punkt)**

i)

$$R = \operatorname{Im}(\mathcal{U} e^{i\omega t}) = \mathcal{U} \operatorname{Im}(e^{i\omega t})$$

$$S = \operatorname{Im}(\mathcal{U} e^{i\omega t + i\frac{2\pi}{3}}) = \mathcal{U} \operatorname{Im}(e^{i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{3}})$$

$$T = \operatorname{Im}(\mathcal{U} e^{i\omega t + i\frac{4\pi}{3}}) = \mathcal{U} \operatorname{Im}(e^{i\omega t} e^{i\frac{4\pi}{3}})$$

ii)

b) Damit gilt

- $$S - R = \mathcal{U} \operatorname{Im}(e^{i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\omega t})$$
$$= \mathcal{U} \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t}(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)\right)$$
$$= \mathcal{U} \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i - 1\right)\right) = \mathcal{U} \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t}\left(-\tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)$$
$$= \mathcal{U} \operatorname{Im}(e^{i\omega t} \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}})$$
$$= \sqrt{3}\, \mathcal{U} \sin(\omega t + \tfrac{5}{6}\pi).$$

Also: Amplitude: $\sqrt{3}\mathcal{U}$, Frequenz ω, Phase: $\frac{5}{6}\pi$.

- $$T - S = \mathcal{U} \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t}(e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}})\right)$$
$$= \mathcal{U} \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{3}}(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)\right)$$
$$\overset{\text{s.o.}}{=} \mathcal{U} \operatorname{Im}(e^{i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{3}} \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}})$$
$$= \sqrt{3}\, \mathcal{U} \operatorname{Im}(e^{i(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6})})$$
$$= \sqrt{3}\, \mathcal{U} \sin(\omega t + \tfrac{9\pi}{6})$$

Also: Amplitude: $\sqrt{3}\mathcal{U}$, Frequenz: ω, Phase: $\frac{9\pi}{6}$.

- $$R - T = \mathcal{U} \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t}(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}})\right)$$
$$= \mathcal{U} \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t}(e^{i2\pi} - e^{i\frac{4\pi}{3}})\right)$$
$$= \mathcal{U} \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t} e^{i\frac{4\pi}{3}}(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)\right)$$
$$\overset{\text{s.o.}}{=} \mathcal{U} \operatorname{Im}(e^{i\omega t} e^{i\frac{4}{3}\pi} \sqrt{3} e^{i\frac{5}{6}\pi})$$

$$= \sqrt{3}\, \mathcal{U} \sin(\omega t + \tfrac{4}{3}\pi + \tfrac{5}{6}\pi) = \sqrt{3}\, \mathcal{U} \sin(\omega t + \tfrac{13}{6}\pi)$$
$$= \sqrt{3}\, \mathcal{U} \sin(\omega t + \tfrac{1}{6}\pi)$$

Also: Amplitude: $\sqrt{3}\mathcal{U}$, Frequenz: ω, Phase: $\frac{1}{6}\pi$.

H18 (Kombinatorik) **(1+1+1 Punkte)**

i) Fall $m = n$:
Dann gibt es $n!$ verschiedene injektive Abbildungen $f\colon A \to B$, denn für das erste Element von A hat man n

Möglichkeiten es zuzuordnen, für das zweite noch $n-1$, weil es nicht auf das selbe Element abgebildet werden darf. Usw. bis man für das letzte Element von A nur noch 1 Möglichkeit hat. Das ergibt $n(n-1)\cdots 1 = n!$ Möglichkeiten.
Fall $m < n$:
Mit der gleichen Überlegung wie im ersten Fall erhält man hier

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

injektive Abbildungen.

ii) Wir berücksichtigen die folgenden Kombinationen von Büchern: 1. 1 französisches+1 spanisches, 2. 1 französisches+1 englisches, 3. 1 englisches+1 spanisches. Es gibt $\binom{5}{1}\binom{7}{1}$ Möglichkeiten, die 1. Kombination auszuwählen, $\binom{5}{1}\binom{11}{1}$ - die 2. Kombination und $\binom{7}{1}\binom{11}{1}$ - die dritte. Daher ist die Antwort $\binom{5}{1}\binom{7}{1} + \binom{5}{1}\binom{11}{1} + \binom{7}{1}\binom{11}{1} = 167$. In einem Regal stehen 5 französische, 7 spanische und 11 englische Bücher. Auf wieviele Arten lassen sich zwei Bücher in verschiedenen Sprachen auswählen?

iii) Es gibt 10 Ziffern von 0 bis 9.Die Ziffern 0 und 4 werden nicht berücksichtigt. Daher stehen uns 8 Ziffern zur Verfügung. Der Code ist 5-Stellig und enthält genau 3 Ziffern. Daher müssen wir erstmal 3 Ziffer aus der Menge mit 8 Ziffern auswählen, um der Code zu konstruieren, und dafür gibt es genau $\binom{8}{3}$ Möglichkeiten. In jeder Kombination für den Code müssen alle 3 Ziffern, die wir mit Buchstaben a, b, c bezeichnen, auftreten. Sei n_1 - die Anzahl des Auftretens von Ziffer a, n_2 - von b, n_3 - von c. Es muss $n_1 + n_2 + n_3 = 5$ und $1 \leq i \leq 3, i = 1, 2, 3$ gelten. Folgende Kombinationen für n_i sind möglich:

	n_1	n_2	n_3
1)	1	1	3
2)	1	2	2
3)	1	3	1
4)	2	1	2
5)	2	2	1
6)	3	1	1

Im 1), 3) und 6) Fall gibt es $5 \cdot 4$ Möglichkeiten, die Wörter zu konstruieren. Im 2), 4) und 5) Fall gibt es $5 \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten dafür. Daher gibt es insgesamt

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}(3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 5) = 8400$$

Kombinationen für die Codewörter.