Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

4. Übung

Präsenzaufgaben

G11 (Trigonometrische Funktionen)

Die Additionstheoreme von Sinus und Cosinus liefern:

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - (\tan x)\cdot(\tan y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \tan(x+y).$$

G12 (Die Überlagerung)

a) • A streckt und staucht die Ausschläge der Schwingung und bestimmt damit die maximale Auslenkung, die Amplitude.

• ω wird mit der Variablen t multipliziert und bestimmt damit die Periode der Schwingung (für $\omega=1$, Periode 2π, für $\omega=2$, Periode π...), d.h. die Frequenz der Schwingung

• φ verschiebt die Kurve nach links bzw. rechts und legt damit den Funktionswert in 0, die Phase, fest.

b) zu f_1: Allgemein gilt (vgl. Kap 4, Kasten nach (35))

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Also ist

$$f_1(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{5}{3}t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

eine Sinusschwingung.

zu g: Es ist mit obigem Ergebnis

$$f_1(t) + f_2(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{5}{3}t + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Nach dem Additionstheorem

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

gilt damit.

$$f_1(t) + f_2(t) = \sqrt{2}\, 2 \cdot \sin\left(\frac{\frac{5}{3}t + \frac{3\pi}{4} + \frac{5}{3}t + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{5}{3}t + \frac{3\pi}{4} - \frac{5}{3}t - \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

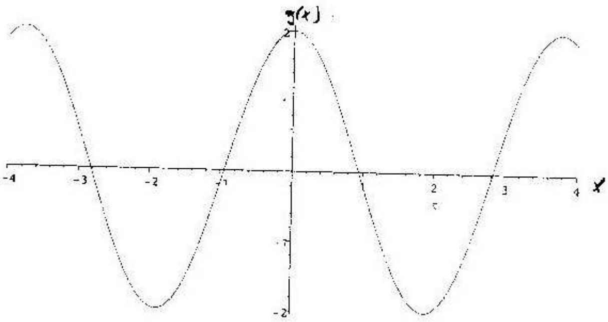
$$= 2\sqrt{2}\, \sin\left(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sin\left(\frac{5}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

und g ist folglich eine Sinusschwingung.

c) zu f_1: $A = \sqrt{2}$, $\omega = \frac{5}{3}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

zu g: $A = 2$, $\omega = \frac{5}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$



G13 (Komplexe Zahlen)

ii) $z + w = 4 + i$, $z \cdot w = 5 + 5i$, $\frac{z}{w} = \frac{(1+2i)(3+i)}{9+1} = \frac{1+5i}{10}$ sowie $|z| = \sqrt{5}$, $|w| = \sqrt{10}$ und $\arg z = \tan^{-1}\frac{2}{1} \simeq 1.12$, $\arg w = \tan^{-1}(-3) \simeq -1.25$.

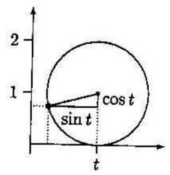
iii) $|\frac{1+it}{1-it}| = \left(\frac{1+it}{1-it}\overline{\left(\frac{1+it}{1-it}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+it}{1-it}\frac{1-it}{1+it}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+t}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$

Hausaufgaben

H12 (Zykloide) (1+1 Punkt)

Der Schlüssel liegt darin die Seitenlängen des eingezeichneten Dreiecks zu bestimmen.

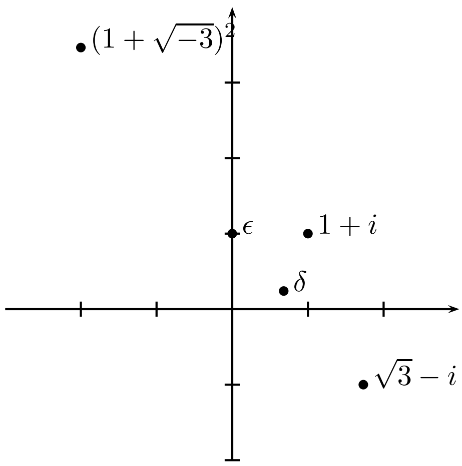
Wir überlegen uns dazu folgendes: Die Länge des Kreisbogens zwischen dem markierten Punkt und dem neuen Aufliegepunkt ist t, da das Rad ja die Entfernung t gerollt ist. Nach der Definition des Bogenmaßes hat damit der Winkel des Dreiecks am Mittelpunkt die Größe t. Also gilt nach Definition von Sinus und Cosinus (der Kreis hat Radius 1!):



Woraus wir sofort die Koordinaten des Punktes als $x = t - \sin(t)$ und $y = 1 - \cos(t)$ ablesen können.

b) Es gilt $\cos(t) = 1-y$. Da $y \in [0,2]$ ist, gilt $1-y \in [-1,1]$. Also können wir den Arcuscosinus anwenden und erhalten $t = \arccos(1-y)$. Einsetzen in $x = t - \sin(t)$ liefert $x = \arccos(1-y) - \sin(\arccos(1-y))$.

H13 (Komplexe Zahlen) (1+1 Punkte)



i) $\delta = \frac{(1-i)^3-1}{(1+i)^5+1}$ und $\epsilon = \sum_{k=1}^{5} i^k$

ii) $|z| \simeq 0.721$ und $\arg z \simeq 0.339$.

H14 (Möbiustransformation) **(3x1 Punkt)**

ii) $\overline{(z-z_0)}(z-z_0) = |z-z_0|^2 = r^2$ Das bedeutet, es ist der Kreis um z_0 mit Radius r.

iii) $\overline{(z-z_0)}(z-z_0) = \overline{z}z - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + \overline{z_0}z_0 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z}z - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + \overline{z_0}z_0 - r^2 = 0$

v*) Wir betrachten zuerst eine Gerade der Form $x - d = 0$. Die Punkte auf der Gerade lassen sich durch $z = d + iy,\ y \in \mathbb{R}$ beschreiben. Eingesetzt in f ergibt das:

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{d - iy}{d^2 + y^2} \ .$$

Wir zeigen jetzt, dass alle $f(z)$ für z auf der Geraden die selbe Gleichung

$$\overline{z}z - \overline{a}z - a\overline{z} - b = 0$$

erfüllen. Dazu setzen wir $f(z)$ ein:

$$\frac{1}{|z|^2} - \overline{a}\frac{\overline{z}}{|z|^2} - a\frac{\overline{\overline{z}}}{|z|^2} + b = \frac{1}{|z|^2} - \overline{a}\frac{\overline{z}}{|z|^2} - a\frac{z}{|z|^2} + b = \frac{1}{|d+iy|^2} - \overline{a}\frac{\overline{d+iy}}{|d+iy|^2} - a\frac{d+iy}{|d+iy|^2} + b.$$

Wir wählen $a = \frac{1}{2d}$ und $b = 0$. Dann ergibt sich

$$\frac{1}{|d+iy|^2} - \frac{1}{2d}\frac{(d-iy)+d+iy}{|d+iy|^2} = \frac{1}{|d+iy|^2} - \frac{1}{2d}\frac{2Re(z)}{|d+iy|^2} = \frac{1}{|d+iy|^2} - \frac{1}{2d}\frac{2d}{|d+iy|^2} = 0 \ .$$

Jetzt für eine Gerade der Form $y - d = 0$. Die Punkte auf der Gerade lassen sich durch $z = x + id,\ x \in \mathbb{R}$ beschreiben. Eingesetzt in f ergibt das:

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - id}{d^2 + y^2} \ .$$

Wir zeigen jetzt, dass alle $f(z)$ für z auf der Geraden die selbe Gleichung

$$\overline{z}z - \overline{a}z - a\overline{z} - b = 0$$

erfüllen. Dazu setzen wir $f(z)$ ein:

$$\frac{1}{|z|^2} - \overline{a}\frac{\overline{z}}{|z|^2} - a\frac{z}{|z|^2} + b = \frac{1}{|x+id|^2} - \overline{a}\frac{\overline{x+id}}{|x+id|^2} - a\frac{x+id}{|x+id|^2} + b.$$

Wir wählen $a = \frac{-1}{2di}$ und $b = 0$. Dann ergibt sich

$$\frac{1}{|x+id|^2} - \frac{-1}{2di}\frac{(x-id)-x-id}{|x+id|^2} = \frac{1}{|x+id|^2} - \frac{1}{2di}\frac{2Im(z)}{|x+id|^2} = \frac{1}{|x+id|^2} - \frac{-1}{2di}\frac{-2di}{|d+iy|^2} = 0 \ .$$