Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

3. Übung

Präsenzaufgaben

G09 (Polynome)

i) $(x^6+64):(x-2) = x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32$
$x^5+3x^4+2x^3-x^2+4:(x+2) = x^4+x^3-x+2$

ii) Der Taschenrechner gibt $p(12345679) = 322$ aus, das Hornerschema ergibt $p(12345679) = 1$. $p(12345679) = 1$ ist richtig! Wir haben es ja mittels Hornerschema gezeigt. 12345679^2 ist für den TR eine sehr große Zahl, nämlich 152415789971041, die er sich nicht merken kann, weshalb er (je nach Stellenzahl) 15241578900000 o.ä. daraus macht. Bei dieser Größenordnung ist der Fehler gering. Das Problem ist, daß wir nun mit $12345678 \cdot 12345679 + 12345678$ eine ähnlich große Zahl abziehen. Dadurch wird der "kleine" Fehler groß. Das Phänomen heißt Auslöschung und ist bei jeder numerischen Rechnung ein Problem, das berücksichtigt werden muß.

Prüfe, was dein TR für $10^{50}+1-10^{50}$ ausgibt.

G10 (Spezielle reelle Funktionen)

: a) $f(x) = 1+\frac{1}{x^2+1}$. Sei $x, y \in [0,\infty)$. Zu zeigen ist $x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$.
$\triangleright x<y \Leftrightarrow x^2+1<y^2+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1} \Leftrightarrow f(x) = 1+\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1}+1 = f(y)\square$.

b) $f(x) = 1+\frac{1}{x^2+1} \leq 1+\frac{1}{1} = 2$, weil $x \geq 0$ ist. So ist 2 die obere Schranke von f.
In $x=0$ ist $f(x)=2$. Daraus folgt, dass $2 = \sup_{x\geq 0} f(x) = \max_{x\geq 0} f(x)$ ist.

c) $f(x) \geq 1$ für alle $x \geq 0$. So ist 1 die untere Schranke von f. Jetzt zeigen wir, dass 1 Infimum von f ist, d.h. 1 die grösste untere Schranke von f ist.
$\triangleright$ Wiederspruchsbeweis. Sei ein $1<\alpha<2$ gibt, so dass $1+\frac{1}{x^2+1} \geq \alpha > 1$ für alle $x \geq 0$ ist. Letzte Ungleichung ist nur für $x \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha-1}-1}$ erfüllt. Für $x > \sqrt{\frac{1}{\alpha-1}-1}$ kann man die Funktion $1+\frac{1}{x^2+1}$ nicht mit α von unten beschränken. Damit haben wir gezeigt, dass $\alpha>1$ kann nicht die Funktion f für alle x von unten beschränken. Wiederspruch.$\square$

Es gibt kein $x \geq 0$, so dass $f(x) = 1+\frac{1}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} = 0$ ist. Deshalb ist 1 kein Minimum für $f(x)$.

G11 (Umkehrfunktion)

Beweis durch Einsetzen:

$$g^{-1}\circ f^{-1}(f\circ g)(x) = g^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ g)(x) = g^{-1}\circ g(x) = x\ .$$

Hausaufgaben

H09 (Polynome) **(1+1 Punkte)**

a) $(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : (x - 1) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2) = x^2 + 4x + 3$. Die Gleichung $x^2 + 4x + 3$ liefert zwei weiteren Nullstellen: $x_3 = -1, x_4 = -3$.

b) Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Nach Identitätsatz für Polynome: Gilt $p(k+1) = 1 - p(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, müssen die Polynome $p(x+1)$ und $1 - p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich sein, d.h. $a_n(x+1)^n + ...a_1(x+1) + a_0 = 1 - a_n x^n - ... - a_1 x - a_0$. Aus der letzten Gleichung folgt sofort, dass $a_n = -a_n$ sein muss, woraus folgt, dass $a_n = 0$ ist. Jetzt können wir die obere Gleichung vereinfachen $a_{n-1}(x+1)^{n-1} + ...a_1(x+1) + a_0 = 1 - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_1 x - a_0$. Daraus genau wie oben folgt, dass $a_{n-1} = 0$ sein muss. Nach $n-1$ Schritten haben wir, dass alle $a_i = 0, i = 1, ..., n$ sind. Und alles, was von der oberen Gleichung geblieben ist, ist $a_0 = 1 - a_0$, woraus sofort $a_0 = \frac{1}{2}$ folgt. Also ist $p(x) = \frac{1}{2}$.

H10 (Spezielle reelle Funktionen) **(6x1 Punkt)**

i) Sei $x < y \in D(q) = [1, \infty)$.

$$x < y \;\Leftrightarrow\; y - x > 0 \Leftrightarrow\; y - x < xy(y-x) \;\Leftrightarrow\; x^2 y + y < y^2 x + x \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y} \;\Leftrightarrow\; q(x) < q(y)$$

ii)

iii) $B(p) = [0, \infty)$ und $B(q) = [1, \infty)$

iv) $p^{-1} = x^2$.

$$x = \frac{y + \frac{1}{y}}{2} \;\Leftrightarrow\; 2xy = y^2 + 1 \Leftrightarrow\; y^2 - 2xy + 1 \;\Leftrightarrow\; y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Nur eine der beiden Lösungen kann richtig sein. Entweder mit $q \circ q^{-1}(x) = x$ überprüfen oder durch Testen des Bildberreichs der Umkehrfunktion. Das ergibt $q^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

v) $r(x) = q \circ p(x)$

vi) $r^{-1}(x) = (q \circ p)^{-1}(x) = p^{-1} \circ q^{-1}(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^2$

H11 (Gerade und ungerade Funktionen) **(5x1 Punkt)**

i) Prüfe $f(x) = f(-x)$ und $h(x) = -h(-x)$.

ii) Prüfe $p(x) \neq \pm p(-x)$.

iii) $g(x) = x^2 + 1$ und $u(x) = x^3 + x$.

iv) Prüfe $p(x) + p(-x) = p(-x) + p(-(-x))$ und $p(x) - p(-x) = p(-x) - p(-(-x)) = -(p(-(-x)) - p(-x)$.

v) Wähle $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ und $u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Man beweist leicht $g(x)$ gerade und $u(x)$ ungerade. Einsetzen liefert $f(x) = g(x) + u(x)$.