Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

2. Übung

G05 (Vollständige Induktion)

i)

1. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ für $n = 1$ ist die Gleichung erfüllt.

2. **Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass für $n = m$ die Aussage $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsschritt. Wir verwenden Induktionsannahme um zu zeigen, dass die Aussage für $n = m+1$, und zwar $\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m+1}{m+2}, m \in \mathbb{N}$, auch gilt.

$\triangleright \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = [\textbf{Annahme}] = \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2} \square$

Hiermit ist die Aussage bewiesen.

ii)

1. $4 < 8 \Rightarrow$ für $n = 2$ ist die Ungleichung erfüllt.

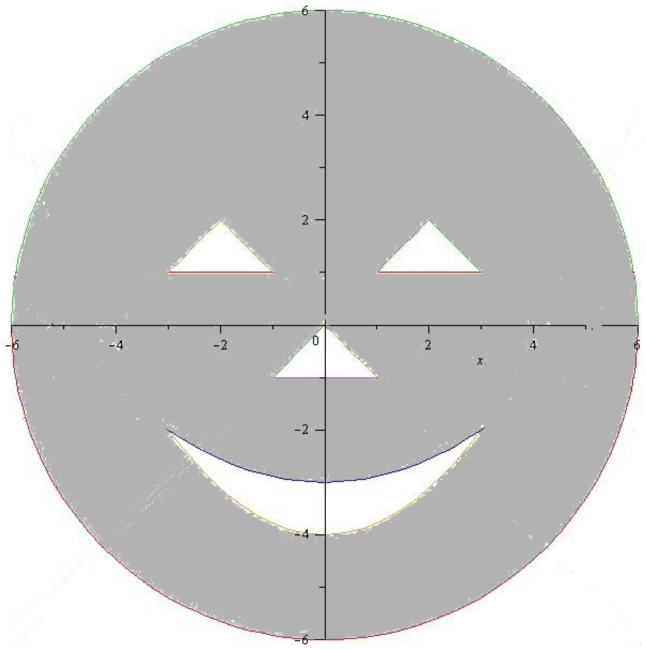
2. **Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass für $n = m$ die Aussage $\prod_{k=1}^{m} k^k < m^{\frac{m(m+1)}{2}}$ gilt.

Induktionsschritt. Wir verwenden Induktionsannahme um zu zeigen, dass die Aussage für $n = m+1$, und zwar $\prod_{k=1}^{m+1} k^k < (m+1)^{\frac{(m+2)(m+1)}{2}}$, auch gilt.

$\triangleright \prod_{k=1}^{m+1} k^k = \prod_{k=1}^{m} k^k \cdot (m+1)^{m+1} < [\textbf{Annahme}] < m^{\frac{m(m+1)}{2}} (m+1)^{m+1} < (m+1)^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \square$

Hiermit ist die Aussage bewiesen.

G06 (Mengen in $\mathbb{R}^2$)



G07 (Abbildungen)

a) Keine Abbildung, da z.B. dem Element $x = 0$ die Werte $y_1 = 4$ und $y_2 = -4$ entsprechen.

b) Eine Abbildung, denn die Funktion $f(x) = 2x$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ und $B(f) = \mathbb{R}$ jedem Element $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Diese Abbildung ist auch injektiv, denn für jeden $y \in \mathbb{R}$ genau ein x existiert, so dass $y = 2x$ ist.

Die Umkehrabbildung ist $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

c) Diese Abbildung ist durch $f(x) = -x^2 - x$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ und $B(f) = (-\infty, \frac{1}{4}]$ gegeben.

Sie ist nicht injektiv, weil z.B. dem Wert $y = 0$ die Elemente $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$ entsprechen.

d) Diese Abbildung ist durch die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 2, & x = 3 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$ gegeben mit $D(f) = \{1, 2, 3\}$ und $B(f) = \{1, 2, 4\}$.

Diese Funktion ist injektiv und die Umkehrabbildung ist $f^{-1}(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 2, & x = 4 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$.

H05 (Vollständige Induktion)

i)

1. Für $n = 1$ ist die Gleichung erfüllt: $1 = \frac{1}{4}1(2)^2 = 1$.

2. **Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass für $n = m$ die Aussage $\sum_{k=1}^{m} k^3 = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2$ gilt.

Induktionsschritt. Wir verwenden Induktionsannahme um zu zeigen, dass die Aussage für $n = m + 1$, und zwar $\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{1}{4}(m+1)^2(m+2)^2$, auch gilt.

$\triangleright \sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = [\textbf{Annahme}] = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2 + (m+1)^3 = \frac{1}{4}(m+1)^2(m^2+4m+4) = \frac{1}{4}(m+1)^2(m+2)^2 \square$

Hiermit ist die Aussage bewiesen.

ii)

1. $27 > 12 \Rightarrow$ für $n = 3$ ist die Ungleichung erfüllt.

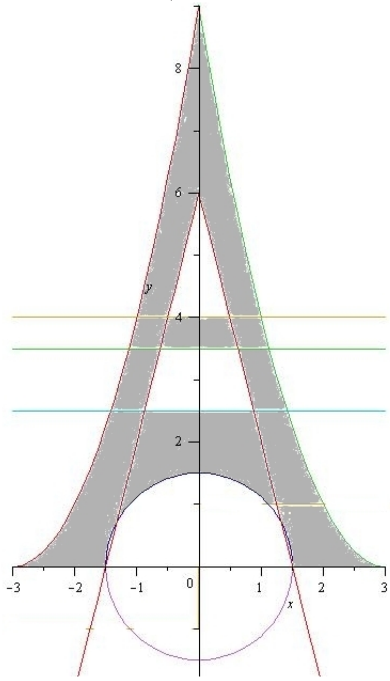
2. **Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass für $n = m$ die Aussage $m^3 > 3m+3$ gilt.

Induktionsschritt. Wir verwenden Induktionsannahme um zu zeigen, dass die Aussage für $n = m + 1$, und zwar $(m+1)^3 > 3m + 6$, auch gilt.

$\triangleright 3m + 6 = (3m+3) + 3 < [\textbf{Annahme}] < m^3 + 3 < m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m+1)^3 \square$

Hiermit ist die Aussage bewiesen.

H06 (**Mengen in** $\mathbb{R}^2$)



H07 (**Abbildungen**)

a) Keine Abbildung, weil z.B. dem Element $x = 1$ die Werte $y_1 = 1$ und $y_2 = -1$ entsprechen.

b) Diese Abbildung durch $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ und $B(f) = \{1, -1\}$ gegeben.

Die Funktion $f(x)$ ist nicht injektiv, da z.B. dem Wert $y = 1$ alle $x \geq 0$ entsprechen.

c) Keine Abbildung ($x = 1$ entsprechen alle $y \in \mathbb{R}$).

d) Diese Abbildung ist durch die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 4 \\ 1, & x = 2 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$ gegeben mit $D(f) = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B(f) = \{0, 1, 2, 3\}$.

Sie ist injektiv. Die Umkehrabbildung ist $f^{-1}(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x = 3 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$.

H08 (**Die De Morgansche Regeln**)

i) Zuerst betrachten wir $(A \cup B)^c$ und $A^c \cap B^c$. Es gilt

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= \{x \in G \colon x \notin A \text{ und } x \notin B\} \\ A^c \cap B^c &= \{x \in G \colon x \notin A\} \cap \{x \in G \colon x \notin B\} = \{x \in G \colon x \notin A \text{ und } x \notin B\}\ . \end{aligned}$$

ii) Setze $A' = A^c$ und $B' = B^c$. Wir verwenden die Regel aus i) für A' und B'.

$$(A^c \cup B^c)^c = (A' \cup B')^c = (A')^c \cap (B')^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B$$

Jetzt bilden wir auf beiden Seiten das Komplement

$$(A^c \cup B^c)^c)^c = A^c \cup B^c = (A \cap B)^c\ .$$