Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

1. Übung

G1: a)

$$17 : 60 = 0.28\overline{3}; \quad 113 : 88 = 1.284\overline{09}.$$

b)

$$2.83 = \frac{283}{100}; \quad 0.\overline{728} = \frac{728}{999}.$$

G2: a)

$$11x = 7x - 4 \Leftrightarrow x = -1$$

Also $L_1 = \{-1\}$. $\sup L_1 = \inf L_1 = -1$.

b)

$$x \geq -\frac{5}{4} \Rightarrow 4x + 5 = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}; \quad x < -\frac{5}{4} \Rightarrow 4x + 5 = -3 \Leftrightarrow x = -2.$$

Also $L_2 = \{-2, -\frac{1}{2}\}$. $\sup L_2 = -\frac{1}{2}, \inf L_2 = -2$.

c) Die Nullstellen sind $x_1 = -3, x_2 = 6$, dann $L_3 = \mathbb{R} \setminus (-3, 6)$ ist. $\sup L_3 = +\infty, \inf L_3 = -\infty$.

d) <u>1 Fall</u>

$$x \geq -1 \Rightarrow (x + 3) + (x + 1) < 10 \Leftrightarrow x < 3.$$

Also $L_{4a} = [-1, 3)$.
<u>2 Fall</u>

$$-3 \leq x < -1 \Rightarrow (x + 3) - (x + 1) < 10 \Leftrightarrow 2 < 10.$$

Also $L_{4b} = [-3, -1)$.
<u>3 Fall</u>

$$x < -3 \Rightarrow -(x + 3) - (x + 1) < 10 \Leftrightarrow -7 < x.$$

Also $L_{4c} = (-7, -3)$.
Lösungsmenge insgesamt:

$$L_4 = L_{4a} \cup L_{4b} \cup L_{4c} = (-7, 3).$$

$\sup L_4 = 3, \inf L_4 = -7$.

Setzt man $x \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{Z}$ oder $x \in \mathbb{N}$ voraus, so ergeben sich die zugehörige Lösungsmengen durch die Schnittbildung von L_i mit $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.

a)

$$L_1 \cap \mathbb{Q} = L_1 \cap \mathbb{Z} = L_1, \quad L_1 \cap \mathbb{N} = \emptyset.$$

b)

$$L_2 \cap \mathbb{Q} = L_2, \ L_2 \cap \mathbb{Z} = \{-2\}, \quad L_2 \cap \mathbb{N} = \emptyset.$$

c)

$$L_3 \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} | \ x \leq -3 \ und \ x \geq 6\},$$

$$L_3 \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} | \ x \leq -3 \ und \ x \geq 6\},$$

$$L_3 \cap \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} | \ x \geq 6\}.$$

d)

$$L_4 \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} | \ -7 < x < 3\},$$
$$L_4 \cap \mathbb{Z} = \{-6. -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\},$$
$$L_4 \cap \mathbb{N} = \{1, 2\}.$$

G03: (Vollständige Induktion)

Induktionsanfang bei $n = 3$:

$$3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1.$$

Induktionsschritt von n auf $n + 1$:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > [Annahme] > 2n + 1 + 2n + 1 = 4n + 2.$$

Wegen $0 > -2n + 1$ gilt

$$4n + 2 > 4n + 2 - 2n + 1 = 2(n + 1) + 1$$

und somit

$$(n+1)^2 > 2(n+1) + 1.$$

G04: **(Folgerung aus den Anordnungsaxiomen und dem Vollständigkeitsaxiom)**

i) Das Archimedische Axiom liefert uns für die Zahl $p = q - 1$ eine natürliche Zahl n, sodaß $np > K$. Wir setzen nun p in die Bernoullische Ungleichung ein:

$$(1 + p)^n = q^n > 1 + np > 1 + nK > nK > K \ .$$

Hieraus extrahieren wir $q^n > K$

ii) Wir wenden die Aussage i) auf das Inverse $p = q^{-1}$ und $K = \varepsilon^{-1}$ an. Es gilt natürlich $p > 1$ und $K \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} q^{-n} = p^n &> K = \varepsilon^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad q^n &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ist $0 < q < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $q^n < \varepsilon$.

Hausaufgaben

H1: a)

$$3:7 = 0.\overline{428571}; \qquad 256:999 = 0.\overline{256}.$$

b)

$$1.1\overline{41} = \frac{1}{10}\cdot 11.\overline{41} = \frac{1}{10}(11 + 0.\overline{41}) = \frac{1}{10}(11 + \frac{41}{99}) = \frac{1130}{990} = \frac{113}{99}.$$

Da $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, gibt es zu der Differenz $3.1415 - \sqrt{2}$ keinen Bruch.

H2: a)

$$x \geq -4 \Rightarrow \frac{1}{2}(x+6) \geq x+4 \Leftrightarrow x \leq -2.$$

Also $L_{1a} = [-4, -2]$.

$$x < -4 \Rightarrow \frac{1}{2}(x+6) \geq -(x+4) \Leftrightarrow x \geq -\frac{14}{3}.$$

Also $L_{1b} = [-\frac{14}{3}, -4)$.
Lösungsmenge insgesamt: $L_1 = L_{1a} \cup L_{1b} = [-\frac{14}{3}, -2]$. $\inf L_1 = -\frac{14}{3}, \sup L_2 = -2$.

b) <u>1 Fall</u>

$$x > 1 \Rightarrow 3 + (x+1) < 2(x-1) \Leftrightarrow x > 6.$$

Also $L_{2a} = (6, \infty)$.
<u>2 Fall</u>

$$-1 \leq x < 1 \Rightarrow 3 + (x+1) < -2(x-1) \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}.$$

Also $L_{2b} = [-1, -\frac{2}{3})$.
<u>3 Fall</u>

$$x < -1 \Rightarrow 3 - (x+1) < -2(x-1) \Leftrightarrow x < 0.$$

Also $L_{2c} = (-\infty, -1)$.
Lösungsmenge insgesamt:

$$L_2 = L_{2a} \cup L_{2b} \cup L_{2c} = \mathbb{R} \setminus [-\frac{2}{3}, 6].$$

$\sup L_2 = \infty, \inf L_2 = -\infty$.

H03: (Vollständige Induktion)

Induktionsanfang bei $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} x^k = 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}.$$

Induktionsschritt von n auf $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = [Annahme] = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

H04: (Archimedisches Axiom)

Wir versuchen einen indirekten Beweis. Angenommen das Gegenteil des Archimedischen Axioms wäre wahr, d.h.,

Es existieren $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < x,\ 0 < y$, *sodaß* $n \cdot x \leq y$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Dann wäre y eine obere Schranke der Menge $M := \{nx \colon n \in \mathbb{N}\}$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom besäße sie ein Supremum y_0. Daß die Menge $\{nx \colon n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt sein soll, ferner ein Supremum besitzen soll, entspricht aber nicht unserer Intuition. Formal gehen wir jetzt so vor: Es gilt $(n+1)x = nx + x \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $nx + x \leq y_0$ oder $nx \leq y_0 - x$. Es gilt sicherlich $y_0 - x < y_0$. Das ist aber ein Widerspruch, da wir angenommen haben, y_0 sei die kleinste oberste Schranke.