Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
12. Februar 2010

13. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Multiple-Choice-Aufgaben

Aufgabe M9 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit)

Für die Funktion $f(x) = x \cdot |x|$ gilt:

☐ f ist stetig, aber nicht differenzierbar. ☐ f ist differenzierbar, aber nicht stetig.

☒ f ist stetig und differenzierbar. ☐ f ist weder stetig noch differenzierbar.

Aufgabe M10 (Stammfunktionen)

Eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{3}{x}$, $x > 0$, ist gegeben durch

☐ $F(x) = \ln(3 + x)$. ☐ $F(x) = \ln\left(\frac{x}{3}\right)$. ☒ $F(x) = \ln(x^3)$. ☐ $F(x) = \ln(3x)$.

Gruppenübung

Aufgabe G50 (Rotationskörper)

Gegeben sei die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Durch die Rotation von f um die x-Achse erhält man einen Trichter, dessen Volumen V und Oberfläche O durch

$$V = \pi \int_1^\infty [f(x)]^2 dx \text{ und } O = 2\pi \int_1^\infty f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

gegeben sind. Damit das ganze ein wenig hübscher aussieht, wird eine studentische Hilfskraft mit einem Pinsel und einem Eimer Farbe ausgestattet, damit sie den Trichter neu anstreicht. Eine Woche harter Arbeit verleitet unsere Hilfskraft doch zum Nachdenken und nach einer kurzen Rechnung (die Sie überprüfen sollen) kommt sie zu dem Schluss, dass sie ihre Arbeit wohl niemals beenden wird, da die Oberfläche des Trichters unendlich groß ist. Als sie dieses Problem in der Sprechstunde ihres Tutors vorbringt, erhält sie den folgenden Rat: „Fülle den Trichter doch einfach bis zum Rand mit Farbe und schütte ihn anschließend um. Dann sieht er aus wie neu.“ Ist dieser Rat wirklich praktikabel?

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass die Oberfläche O des Trichters nicht endlich ist:
$O = 2\pi \int_1^\infty f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}dx.$

Da das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}dx$ wegen $\int\limits_1^b \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ divergiert, und da $0 \leq \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot 1 \leq \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$ für alle $x \geq 1$ gilt, divergiert auch das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}dx$. Also besitzt der Trichter keine endliche Oberfläche. Das Volumen des Trichters ist endlich, wie folgende Rechnung zeigt: $V = \pi \int_1^\infty [f(x)]^2dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \pi \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\pi \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} -\frac{\pi}{b} + \pi = \pi < \infty.$

Aufgabe G51 (Uneigentliche Integrale)

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$ (b) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$ (c) $\int\limits_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx.$

Lösung:

(a) Wir substituieren $t = \sin x$ und mit $\frac{dt}{dx} = \cos x$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ ergibt sich folgendes:
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \lim\limits_{a\searrow 0} \int\limits_{\sin a}^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim\limits_{a\searrow 0} \left[2\sqrt{t}\right]_{\sin a}^1 = \lim\limits_{a\searrow 0} \left(2 - 2\sqrt{\sin a}\right) = 2.$

(b) Wir verwenden die Substitution $t = x^2 + 1$ mit $\frac{dt}{dx} = 2x$ und erhalten folgendes Ergebnis:
$\int\limits_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^3}dx = \frac{1}{2} \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{2x}{(x^2+1)^3}dx = \frac{1}{2} \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^{b^2+1} \frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{2} \lim\limits_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2}\right]_1^{b^2+1}$
$= -\frac{1}{4} \lim\limits_{b\to\infty} \left(\frac{1}{(b^2+1)^2} - 1\right) = \frac{1}{4}.$

(c) Wegen $1 \leq x^4$ für alle $x \in [1, \infty)$ folgt zunächst $\sqrt{x^4 + 1} \leq \sqrt{x^4 + x^4} = \sqrt{2x^4} = \sqrt{2}x^2$ und damit $\frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}x^2}$ sowie $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \geq \frac{x}{\sqrt{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x}$ für alle $x \in [1, \infty)$. Für jedes $b \geq 1$ gilt daher $\int\limits_1^b \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_1^b \frac{1}{x}dx$. Da das Integral $\int\limits_1^b \frac{1}{x}dx$ für $b \to \infty$ keinen Grenzwert hat, ist das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$ nicht existent.

Aufgabe G52 (Integralkriterium für Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit dem Integralkriterium auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{k}{e^k}$ (b) $\sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k \cdot \ln k}$ (c) $\sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k \cdot (\ln k)^2}.$

Lösung:

(a) Mit $f(x) = \frac{x}{e^x} = x \cdot e^{-x}$ erhalten wir $f'(x) = (1 - x)e^{-x} < 0$, falls $x > 1$. Für $x > 1$ ist f also monoton fallend. Es gilt:
$\int\limits_1^\infty x \cdot e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b x \cdot e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty} [-(x + 1) \cdot e^{-x}]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} (-(b + 1) \cdot e^{-b}) + 2e^{-1}$
$= \lim\limits_{b\to\infty} \left(-\frac{(b+1)}{e^b}\right) + \frac{2}{e} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{e^b}\right) + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}.$

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{k}{e^k}$ nach dem Integralkriterium für Reihen.

(b) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ ist im Intervall $[2, \infty)$ monton fallend. Es gilt:
$\int\limits_2^b \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int\limits_2^b \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx = [\ln(\ln x)]_2^b = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \overset{b \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$
Also existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$ nicht, und somit ist die Reihe $\sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k \cdot \ln k}$ nach dem Integralkriterium für Reihen divergent.

(c) $f(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln x)^2}$ ist auf $[2, \infty)$ monton fallend und es gilt:
$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln x)^2} dx = \lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_2^b \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} dx = \lim\limits_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^b = \lim\limits_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{\ln b}\right) + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2},$
also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k \cdot (\ln k)^2}$.

Aufgabe G53 (Konvergenzradius von Potenzreihen)

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

i. $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k^k}$ ii. $\sum\limits_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

(b) Für welche reellen Zahlen x konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}(x+2)^k}{k \cdot 5^{k+1}}$?

Lösung:

(a) i. Mit $a_n := \frac{1}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt:
$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sqrt[n]{|\frac{1}{n^n}|}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}} = \sqrt[n]{n^n} = n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$
Daraus ergibt sich durch Anwendung des Wurzelkriteriums der Konvergenzradius $r = \infty$.

ii. Für die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ ergibt sich mit der Substitution $t = x^2$ die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^\infty \frac{t^k}{(2k)!}$. Mit $a_n := \frac{1}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$\frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2)(2n+1) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$
Nach dem Quotientenkriterium hat die Potenzreihe somit den Konvergenzradius $r = \infty$.

(b) Hier führt die Substitution $t = x + 2$ auf die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1} t^k}{k \cdot 5^{k+1}}$. Mit $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, folgt:
$\frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1) \cdot 5^{n+2}}}\right| = \frac{(n+1) \cdot 5^{n+2}}{n \cdot 5^{n+1}} = 5 \cdot \frac{n+1}{n} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 5.$
Mit dem Quotientenkriterium folgt damit das Konvergenzintervall $(-5, 5)$. Zu betrachten sind jetzt noch die Randpunkte $t_1 = -5$ und $t_2 = 5$.
Für $t_1 = -5$ erhalten wir $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}(-5)^k}{k \cdot 5^{k+1}} = -\frac{1}{5} \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$. Da die harmonische Reihe divergiert, ist $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1} t^k}{k \cdot 5^{k+1}}$ für $t_1 = -5$ divergent.
Für $t_2 = 5$ erhalten wir $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1} 5^k}{k \cdot 5^{k+1}} = -\frac{1}{5} \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k}$. Da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k}$ nach dem Leibnitzkriterium konvergiert, folgt die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1} t^k}{k \cdot 5^{k+1}}$ für $t_2 = 5$.
Also konvergiert $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1} t^k}{k \cdot 5^{k+1}}$ für alle $t \in (-5, 5]$ und somit konvergiert $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}(x+2)^k}{k \cdot 5^{k+1}}$ für alle $x \in (-7, 3]$.

Aufgabe G54 (Taylorreihen I)

Bestimmen Sie für das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 1$, die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Lösung: Wir bilden die Ableitungen des Polynoms $p(x)$:
$p'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 8x + 1$,
$p''(x) = 12x^2 + 12x + 8$,
$p'''(x) = 24x + 12$,
$p^{(4)}(x) = 24$,
$p^{(n)}(x) = 0$, $n \geq 5$.
Am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ erhalten wir:
$p^{(0)}(1) = p(1) = 7$, $p'(1) = 19$, $p''(1) = 32$, $p'''(1) = 36$, $p^{(4)}(1) = 24$, $p^{(n)}(1) = 0$, $n \geq 5$.
Somit ist $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = 7 + 19(x-1) + 32(x-1)^2 + 36(x-1)^3 + 24(x-1)^4$ die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe G55 (Taylorreihen II)

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe gegen f?

Lösung: Die n-te Ableitung der Funktion f lautet $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $f^{(n)}(0) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!}x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Dies ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine geometrische Reihe, welche für alle $x \in (-1,\, 1)$ konvergiert und den Grenzwert $\frac{1}{1-x}$ hat. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,\, 1)$ divergiert sie. Also konvergiert die Taylorreihe von f für alle $x \in (-1,\, 1)$ gegen f und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,\, 1)$.

Aufgabe G56 (Harmonische Reihe)

In der Vorlesung wurde die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ mit Hilfe der folgenden Ungleichung begründet:

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1.$$

Leiten Sie diese Ungleichung für $n \geq 1$ her.
Hinweis: Verwenden Sie Ober- und Untersummen.

Lösung: Es gilt $\ln(n+1) = \int\limits_1^{n+1} \frac{1}{x}dx$. Wir zeigen zunächst, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ Obersumme zu $\int\limits_1^{n+1} \frac{1}{x}dx$ ist. Hierzu zerlegen wir das Intervall $[1,\, n+1]$ in n Teilintervalle der Länge 1. Da $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[1, n+1]$ monoton fällt, ist $M_k = \max\limits_{x \in [k,\, k+1]} f(x) = f(k) = \frac{1}{k}$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Und somit ergibt sich für die Obersumme $S_f = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot M_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Wir zeigen nun noch, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1$ Untersumme zu $\int\limits_1^{n+1} \frac{1}{x}dx$ ist. Dazu zerlegen wir das Intervall $[1,\, n]$ analog zum obigen Fall in $n-1$ Teilintervalle der Länge 1. Da $f(x)$ auf $[1,\, n]$ monton fallend ist, ergibt sich $m_k = \min\limits_{x \in [k,\, k+1]} f(x) = f(k) = \frac{1}{k+1}$ für alle $k = 1, \ldots, n-1$. Wir erhalten also für die Untersumme $s_f = \sum\limits_{k=1}^{n-1} m_k \cdot 1 = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 1$. Somit ist auch die zweite Ungleichung gezeigt.