Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
5./8. Februar 2010

12. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Multiple-Choice-Aufgaben

Aufgabe M7 (Reihen)
Wie viele der folgenden vier Reihen sind konvergent?

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

☒ keine ☐ eine ☐ zwei ☐ drei

Aufgabe M8 (Zweite Ableitung)
Die zweite Ableitung der Funktion $f(x) = x \cdot \ln(2x)$ hat an der Stelle 1 den Wert

☐ -1. ☐ 0. ☒ 1. ☐ 2.

Gruppenübung

Aufgabe G45 (Regel von l'Hospital)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x}$. Können Sie auf diesen Grenzwert die Regel von l'Hospital anwenden? Welches Resultat würden Sie bei unüberlegter Anwendung erhalten?

(b) Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital. Von welchem Typ sind die Grenzwerte jeweils?

i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

Lösung:

(a) Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x}{\lim\limits_{x\to 0} e^x} = \frac{0}{1} = 0$. Die Regel von l'Hospital ist hier nicht anwendbar, da der Grenzwert nicht vom Typ „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ ist. Würden wir die Regel von l'Hospital anwenden, so ergäbe sich $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1} = 1$.

(b) i. Der Grenzwert ist vom Typ „$\frac{0}{0}$“.
Es ist $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$.

ii. Der Grenzwert ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“.
Es ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}$. Da der zweite Grenzwert nicht existiert, ist die Regel von l'Hospital nicht anwendbar. Untersucht man den ersten Grenzwert direkt, so ergibt sich $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{\sin x}{x}) = 1$, da $|\sin x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, gilt.

iii. Der Grenzwert ist vom Typ „$\frac{0}{0}$“.
Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe G46 (Unter- und Obersummen)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $D_f = [0, 2]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei mit $Z_n := \left\{[\frac{0}{n}, \frac{2}{n}], [\frac{2}{n}, \frac{4}{n}], \ldots, [\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2n}{n}]\right\}$ eine äquidistante Zerlegung von $[0, 2]$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[0, 2]$ und tragen Sie in Ihr Diagramm die Flächenelemente der Unter– bzw. Obersummen bzgl. der Unterteilung Z_5 ein. Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Untersummen $s_f(Z_n)$ bzw. der Obersummen $S_f(Z_n)$ an.

(Hinweis: Verwenden Sie die Summenformel $\sum\limits_{s=1}^{k} s^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$).

(b) Bestimmen Sie nun die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} s_f(Z_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(Z_n)$ und geben Sie $\int\limits_0^2 f(x)dx$ an.

Lösung:

(a) Mit $m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_{i-1})$ und $M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_i)$ folgt:

$s_f(Z_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{8}{n^3} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n-1} i^2$ und

$S_f(Z_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} i^2$.

Mit $\sum\limits_{s=1}^{k} s^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$ folgt:

$s_f(Z_n) = \frac{8}{n^3} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{(2n-1)n(n-1)}{6} = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{2n^3-3n^2+n}{6} = \frac{8}{6} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ und

$S_f(Z_n) = \frac{8}{n^3} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{8}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$.

(b) Mit den Formeln aus a) erhalten wir:
$\lim\limits_{n\to\infty} s_f(Z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{6} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{8}{3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_f(Z_n)$.
Da f auf $[a, b]$ beschränkt ist und $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(Z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ gilt,

erhalten wir $\int\limits_0^2 f(x)dx = \frac{8}{3}$.

Aufgabe G47 (Grundlegende Integrationstechniken)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x\right) dx$
(b) $\int (x^2 + 3\cos x) dx$
(c) $\int \left(\frac{3}{x^2} - 2x^3\right) dx$
(d) $\int \frac{3}{x} dx$
(e) $\int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + 2x + 3x^2\right) dx$
(f) $\int \left(4e^x - 4x^3 + 2x + 5\sin x\right) dx$
(g) $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x} + x^{\frac{3}{5}}\right) dx$
(h) $\int \sinh x dx$
(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
(j) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$
(k) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$
(l) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$.

Lösung:

(a) $\int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x\right) dx = \frac{1}{8}x^4 + x^2 + C$.
(b) $\int (x^2 + 3\cos x) dx = \frac{1}{3}x^3 + 3\sin x + C$.
(c) $\int \left(\frac{3}{x^2} - 2x^3\right) dx = -\frac{3}{x} - \frac{1}{2}x^4 + C$.
(d) $\int \frac{3}{x} dx = 3\ln|x| + C$.
(e) $\int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + 2x + 3x^2\right) dx = -\frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x} + \ln|x| + x + x^2 + x^3 + C$.
(f) $\int \left(4e^x - 4x^3 + 2x + 5\sin x\right) dx = 4e^x - x^4 + x^2 - 5\cos x + C$.
(g) $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x} + x^{\frac{3}{5}}\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{2}\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C$.
(h) $\int \sinh x dx = \cosh x + C$.
(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$.
(j) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$.
(k) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x + C$.
(l) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh} x + C$, wobei $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$ für $x \in (-1,\, 1)$.

Aufgabe G48 (Partielle Integration)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe von partieller Integration:

(a) $\int\limits_0^\pi (x \cdot \sin x) dx$ (b) $\int\limits_0^1 (x^2 \cdot e^x) dx$ (c) $\int\limits_1^e (\frac{1}{x} \cdot \ln x) dx$ (d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) dx$.

Lösung:

(a) $\int\limits_0^\pi (x \cdot \sin x) dx \overset{\substack{u(x)=x,\\ v'(x)=\sin x}}{=} [x \cdot (-\cos x)]_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$.

(b) $\int\limits_0^1 (x^2 \cdot e^x) dx \overset{\substack{u_1(x)=x^2,\\ v_1'(x)=e^x}}{=} [x^2 \cdot e^x]_0^1 - \int\limits_0^1 2x \cdot e^x dx \overset{\substack{u_2(x)=2x,\\ v_2'(x)=e^x}}{=} e - [2x \cdot e^x]_0^1 + \int\limits_0^1 2e^x dx = e - 2e + [2e^x]_0^1$
$= -e + 2e - 2 = e - 2$.

(c) $\int\limits_1^e (\frac{1}{x} \cdot \ln x) dx \overset{\substack{u(x)=\ln x,\\ v'(x)=\frac{1}{x}}}{=} [\ln^2 x]_1^e - \int\limits_1^e (\ln x \cdot \frac{1}{x}) dx = 1 - \int\limits_1^e (\frac{1}{x} \cdot \ln x) dx$
$\Rightarrow \int\limits_1^e (\frac{1}{x} \cdot \ln x) dx = \frac{1}{2}$.

(d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) dx \overset{\substack{u(x)=\sin x,\\ v'(x)=\cos x}}{=} [\sin^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot \sin x) dx = 1 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) dx$
$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) dx = \frac{1}{2}$.

Aufgabe G49 (Substitutionsregel)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{3\cos x} \cdot \sin x) dx$ (b) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx$ (c) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$ (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) dx$.

Lösung:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{3\cos x} \cdot \sin x) dx \overset{\substack{t=g(x)=\cos x,\\ dt=-\sin x dx}}{=} -\int_{g(0)}^{g(\frac{\pi}{2})} e^{3t} dt = -\int_1^0 e^{3t} dt = \int_0^1 e^{3t} dt = [\frac{1}{3}e^{3t}]_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$.

(b) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \overset{\substack{t=g(x)=e^x+1,\\ dt=e^x dt}}{=} \int_{g(0)}^{g(\ln 2)} \frac{1}{t^2} dt = \int_2^3 \frac{1}{t^2} dt = [-\frac{1}{t}]_2^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

(c) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx \overset{\substack{t=g(x)=\ln x,\\ dt=\frac{1}{x} dx}}{=} \int_{g(e)}^{g(e^2)} \frac{1}{t} dt = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln |t|]_1^2 = \ln 2$.

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) dx \overset{\substack{t=g(x)=\sin x,\\ dt=\cos x dx}}{=} \int_{g(0)}^{g(\frac{\pi}{2})} t dt = \int_0^1 t dt = [\frac{1}{2}t^2]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Hausübung

Aufgabe H38 (Regel von l'Hospital) (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2x-e^{-2x}}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} (x \cdot e^{-x})$ (d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

Lösung:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2+2e^{-2x}}{2x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-4e^{-2x}}{2} = -2$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (x \cdot e^{-x}) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x + 1}{1} = 2$.

Aufgabe H39 (Grundlegende Integrationstechniken) (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int (\frac{2}{1+x} - \frac{1}{x^2}) dx$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x+5}} dx$ (c) $\int \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx$ (d) $\int \frac{1}{2^x} dx$.

Lösung:

(a) $\int (\frac{2}{1+x} - \frac{1}{x^2}) dx = 2\ln|1+x| + \frac{1}{x} + C$.

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{x+5}} dx = 2\sqrt{x+5} + C$.

(c) $\int \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int \sqrt{\cosh^2 x} dx = \int \cosh x dx = \sinh x + C$.

(d) $\int \frac{1}{2^x} dx = \int \frac{1}{e^{x \cdot \ln 2}} dx = -\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{e^{x \cdot \ln 2}} + C = -\frac{1}{2^x \cdot \ln 2} + C$.

Aufgabe H40 (Partielle Integration) (3 Punkte + 1 Zusatzpunkt)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe von partieller Integration:

(a) $\int\limits_0^\pi (x^2 \cdot \sin x)dx$ (b) $\int\limits_0^1 (x \cdot e^x)dx$ (c) $\int\limits_0^\pi \sin^2 x dx$ (d) $\int\limits_1^e \ln x dx$.

Lösung:

(a) $\int\limits_0^\pi x^2 \cdot \sin(x)dx \overset{\substack{u_1(x)=x^2,\\ v_1'(x)=\sin x}}{=} [x^2 \cdot (-\cos x)]_0^\pi + \int\limits_0^\pi (2x \cdot \cos x)dx \overset{\substack{u_2(x)=2x,\\ v_2'(x)=\cos x}}{=} \pi^2 + [2x \cdot \sin x]_0^\pi - \int\limits_0^\pi 2\sin x dx$
$= \pi^2 - [2(-\cos x)]_0^\pi = \pi^2 - 4.$

(b) $\int\limits_0^1 (x \cdot e^x)dx \overset{\substack{u(x)=x,\\ v'(x)=e^x}}{=} [x \cdot e^x]_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$

(c) $\int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \int\limits_0^\pi (\sin x \cdot \sin x)dx \overset{\substack{u(x)=\sin x,\\ v'(x)=\sin x}}{=} [\sin x \cdot (-\cos x)]_0^\pi + \int\limits_0^\pi (\cos x \cdot \cos x)dx$
$= \int\limits_0^\pi \cos^2 x dx \overset{\cos^2 x = 1-\sin^2 x}{=} \int\limits_0^\pi (1 - \sin^2 x)dx = \int\limits_0^\pi 1 dx - \int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = [x]_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin^2 x dx$
$= \pi - \int\limits_0^\pi \sin^2 x dx$
$\Rightarrow \int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$

(d) $\int\limits_1^e \ln x dx = \int\limits_1^e (1 \cdot \ln x)dx \overset{\substack{u(x)=\ln x,\\ v'(x)=1}}{=} [x \cdot \ln x]_1^e - \int\limits_1^e (x \cdot \frac{1}{x})dx = e - \int\limits_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = 1.$

Aufgabe H41 (Substitutionsregel) (3 Punkte + 1 Zusatzpunkt)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

(a) $\int\limits_0^2 (x \cdot \sqrt{1+2x^2})dx$ (b) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot e^{\sin x})dx$ (c) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx$ (d) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$.

Hinweis zu d): Verwenden Sie $\int \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\sinh x \cdot \cosh x + x) + C$ und $\cosh(\operatorname{arsinh} x) = \sqrt{1+x^2}$.

Lösung:

(a) $\int\limits_0^2 (x \cdot \sqrt{1+2x^2})dx \overset{\substack{t=g(x)=2x^2,\\ dt=4xdx}}{=} \int\limits_{g(0)}^{g(2)} \frac{1}{4}\sqrt{1+t}dt = \int\limits_0^8 \frac{1}{4}\sqrt{1+t}dt = [\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(1+t)^3}]_0^8 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}.$

(b) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot e^{\sin x})dx \overset{\substack{t=g(x)=\sin x,\\ dt=\cos x dx}}{=} \int\limits_{g(-\frac{\pi}{2})}^{g(\frac{\pi}{2})} e^t dt = \int\limits_{-1}^1 e^t dt = [e^t]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}.$

(c) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx \overset{\substack{t=g(x)=(1+x^3),\\ dt=3x^2dx}}{=} \int\limits_{g(0)}^{g(1)} \frac{1}{3t}dt = \int\limits_1 2\frac{1}{3t}dt = [\frac{1}{3}\ln|t|]_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2.$

(d) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \overset{\substack{x=g^1(t)=\sinh t,\\ dx=\cosh t dt}}{=} \int\limits_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(1)} (\sqrt{1+\sinh^2 t} \cdot \cosh t)dt = \int\limits_{\operatorname{arsinh} 0}^{\operatorname{arsinh} 1} \cosh^2 t dt = \int\limits_0^{\operatorname{arsinh} 1} \cosh^2 t dt$
$= [\frac{1}{2}(\sinh t \cdot \cosh t + t)]_0^{\operatorname{arsinh} 1} \overset{\cosh(\operatorname{arsinh} x)=\sqrt{1+x^2}}{=} \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1).$