Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
29. Januar/1. Februar 2010

11. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Multiple-Choice-Aufgaben

Aufgabe M5 (Nullfolgen)

Wie viele der folgenden vier Aussagen sind wahr? Sei $(a_n)_n$ eine Nullfolge und $(b_n)_n$ eine konvergente Folge. Dann ist die Folge $(c_n)_n$ mit den Folgengliedern

- $c_n = a_n b_n$ stets eine Nullfolge.
- $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ eine Nullfolge.
- $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ keinesfalls eine Nullfolge.
- $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ keinesfalls eine Nullfolge.

☐ keine ☒ eine ☐ zwei ☐ drei

Aufgabe M6 (Grenzwert)

Die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ hat den Grenzwert

☐ 1. ☐ e. ☒ e^2. ☐ ∞.

Gruppenübung

Aufgabe G40 (Differentialquotient)

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, mit Hilfe des Differentialquotienten. In welchen Punkten ist die Funktion differenzierbar?

Lösung: Für $x_0 > 0$ können wir die Ableitung von f mit dem Differentialquotienten bestimmen: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
Für $x_0 = 0$ existiert $\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$ nicht. Also ist die Funktion für alle $x > 0$ differenzierbar.

Aufgabe G41 (Differenzierbarkeit von Funktionen)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = |x|^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass f für $n = 1$ nicht in $x_0 = 0$ differenzierbar ist. Was gilt für $n \geq 2$?

Lösung: $f(x) = |x|^n$ lässt sich auch schreiben als $f(x) = \begin{cases} (-x)^n & \text{für } x \leq 0 \\ x^n & \text{für } x > 0 \end{cases}$. Damit gilt: $\lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{(-x)^n}{x} = -\lim_{x\nearrow 0} (-x)^{n-1} = 0$ und $\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x\searrow 0} x^{n-1} = 0$. Also ist f für $n \geq 2$ in $x_0 = 0$ differenzierbar.

Aufgabe G42 (Technik des Differenzierens)

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

(a) $f_1(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

(b) $f_2(x) = (x^2 - 1)(x^7 - 3x + 1)$

(c) $f_3(x) = \frac{5}{x^3} - 4$

(d) $f_4(x) = \frac{7x^2+2x}{27x^3-3}$

(e) $f_5(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$

(f) $f_6(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-2x}}$

(g) $f_7(x) = 4x^3 - 2x^{-\frac{1}{3}}$

(h) $f_8(x) = \frac{x^2-\sin x}{2+\sin x}$

(i) $f_9(x) = \cos(\sin x)$

(j) $f_{10}(x) = e^{-x^2}$

(k) $f_{11}(x) = \ln(\sin(x^3 - 4x + 2))$

(l) $f_{12}(x) = x^x$.

Lösung:

(a) $f_1'(x) = 4x^3 - 6x$

(b) $f_2'(x) = 2x \cdot (x^7 - 3x + 1) + (x^2 - 1) \cdot (7x^6 - 3) = 9x^8 - 7x^6 - 9x^2 + 2x + 3$

(c) $f_3'(x) = -\frac{15}{x^4}$

(d) $f_4'(x) = \frac{(14x+2)\cdot(27x^3-3)-(7x^2+2x)\cdot 81x^2}{(27x^3-3)^2} = \frac{-189x^4+108x^3-42x-6}{(27x^3-3)^2}$

(e) $f_5'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3-2x+1}} \cdot (3x^2 - 2) = \frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x+1}}$

(f) Vereinfache $f_6(x)$ zu $f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, dann ist $f_6'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{x-2} = -\frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3}$.

(g) $f_7'(x) = 12x^2 + \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

(h) $f_8'(x) = \frac{(2x-\cos x)\cdot(2+\sin x)-(x^2-\sin x)\cdot\cos x}{(2+\sin x)^2} = \frac{4x+2x\sin x-2\cos x-x^2\cos x}{(2+\sin x)^2}$

(i) $f_9'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$

(j) $f_{10}'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

(k) $f_{11}'(x) = \frac{1}{\sin(x^3-4x+2)} \cdot \cos(x^3 - 4x + 2) \cdot (3x^2 - 4) = \frac{(3x^2-4)\cos(x^3-4x+2)}{\sin(x^3-4x+2)}$

(l) Es ist $f_{12}(x) = x^x = e^{x\cdot\ln x}$. Damit ist $f_{12}'(x) = (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot e^{x\cdot\ln x} = (\ln x + 1)x^x$.

Aufgabe G43 (Differentiation der Umkehrfunktion)

Es sei die Funktion $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben. Berechnen Sie die erste Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $x_0 = 1$.

Lösung: $f(x) = x + e^x$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$ und damit injektiv. Außerdem gilt $f(0) = 1$, also $f^{-1}(1) = 0$. Da f injektiv ist, ist 0 das einzige Urbild zu 1. Mit $f'(x) = 1 + e^x$ erhält man $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe G44 (Newton-Verfahren)

Wir wollen in dieser Aufgabe ein Verfahren herleiten, mit dem sich Gleichungen der Form $f(x) = 0$ für eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ näherungsweise lösen lassen, die nicht exakt lösbar sind. Wir nehmen dazu weiterhin an, dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt, und die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ streng monoton steigend ist.

(a) Was lässt sich aus den Voraussetzungen für die Anzahl der Nullstellen von f im Intervall $[a, b]$ folgern?

(b) Das Verfahren basiert darauf, von einem geratenen Startwert $x_0 \in [a, b]$ aus, von dem man vermutet, dass er der gesuchten Lösung nahe liegt, schrittweise bessere Näherungswerte zu erzeugen. Dazu betrachtet man im aktuellen Näherungswert x_n die Tangente der Funktion f und berechnet deren Nullstelle. Diese verwendet man als neuen Näherungswert x_{n+1} und wiederholt das Verfahren. Es lässt sich zeigen, dass die so erhaltene Folge $(x_n)_n$ unter geeigneten Voraussetzungen gegen eine Lösung $\xi \in [a, b]$ der Gleichung $f(x) = 0$ konvergiert. Dieses Verfahren heißt *Newton-Verfahren*.

   i. Veranschaulichen Sie sich das Newton-Verfahren an Hand einer Skizze und stellen Sie die Gleichung der Tangente an f im Punkt $(x_n, f(x_n))$, $x_n \in [a, b]$, auf.

   ii. Berechnen Sie die Nullstelle x_{n+1} der in i. gefundenen Tangente. Dies ergibt eine Formel für die neue Näherungslösung $x_{n+1} \in [a, b]$ der Gleichung $f(x) = 0$.

(c) Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um die Gleichung $f(x) = 0$ mit $f(x) = x - \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, auf 5 Nachkommastellen genau zu lösen. Verwenden Sie als Startlösung $x_0 = 0$.

(d) Berechnen Sie $\sqrt{2}$ auf 5 Nachkommastellen genau. Wählen Sie dafür eine geeignete Funktion f und wenden Sie das Newton-Verfahren für eine geeignete Startlösung auf die Gleichung $f(x) = 0$ an.

Lösung:

(a) Da f nach Voraussetzung stetig ist, folgt aus $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ mit dem Zwischenwertsatz, dass f im Intervall $[a, b]$ eine Nullstelle ξ besitzt. Da f auf $[a, b]$ streng monoton steigend ist, ist ξ die einzige Nullstelle von f in diesem Intervall.

(b) Wir leiten nun die Rekursionsformel für das Newton-Verfahren her.

   i. Die Gleichung der Tangente an f im Punkt $x_n \in [a, b]$ lautet: $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$.

   ii. Es ist $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \Leftrightarrow f'(x_n)(x - x_n) = -f(x_n) \Leftrightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Die Nullstelle der Tangente an der Stelle x_n ist also $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Nach dieser Rekursionsformel berechnen wir schrittweise bessere Näherungslösungen für die Gleichung $f(x) = 0$, angefangen bei einer geratenen Startlösung x_0.

(c) Es gilt $f'(x) = 1 + \sin x > 0$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Damit ist die Funktion $f(x) = x - \cos x$ auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend. Außerdem ist $f(0) = -1 < 0$ und $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$. Somit erfüllt f obige Voraussetzungen und es existiert im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine eindeutige Nullstelle von f. Die Rekursionsformel für das Newton-Verfahren lautet: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin x_n}$, $n \geq 0$. Mit der Startlösung $x_0 = 0$ erhalten wir die folgenden Näherungslösungen:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= 1,0 \\
x_2 &\approx 0,750363867840244 \\
x_3 &\approx 0,739112890911362 \\
x_4 &\approx 0,739085133385284 \\
x_5 &\approx 0,739085133215161.
\end{aligned}
$$

Hier können wir abbrechen, da sich die Lösung in der sechsten Nachkommastelle nicht mehr ändert. Die Lösung der Gleichung $x - \cos x = 0$ ist also auf 5 Nachkommastellen genau $0,73909$.

(d) Um einen Näherungswert für $\sqrt{2}$ zu berechnen, wählen wir die Funktion $f(x) = x^2 - 2$, $x \in [1,\, 2]$. Es ist $f'(x) = 2x > 0$ für alle $x \in [1,\, 2]$. Daher ist die Funktion auf diesem Intervall streng monoton steigend. Zusammen mit $f(1) = -1 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$ erfüllt die Funktion also die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes und besitzt somit eine eindeutige Nullstelle im Intervall $[1,\, 2]$. Als Rekursionsformel für das Newton-Verfahren erhalten wir $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$, $n \geq 0$. Für die Startlösung $x_0 = 1$ ergeben sich folgende Näherungslösungen:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1,5 \\ x_2 &\approx 1,416666666666667 \\ x_3 &\approx 1,414215686274510 \\ x_4 &\approx 1,414213562374690 \\ x_5 &\approx 1,414213562373095. \end{aligned}$$

Der gesuchte Näherungswert für $\sqrt{2}$ lautet also $1,41421$.

Hausübung

Aufgabe H35 (Technik des Differenzierens) (4 Punkte)

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

(a) $f_1(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{4}{4x^2+5x^4+1}$

(b) $f_2(x) = \sin(8x - \frac{3}{x^4+1})$

(c) $f_3(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{1+x^2}}$

(d) $f_4(x) = \sqrt{4x^2+4x+1} - 2x$.

Lösung:

(a) $f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x + \frac{-4\cdot(8x+20x^3)}{4x^2+5x^4+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{32x+80x^2}{4x^2+5x^4+1}$

(b) $f_2'(x) = \cos(8x - \frac{3}{x^4+1}) \cdot (8 - \frac{-3\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2)}) = (8 + \frac{12x^3}{(x^4+1)^2}) \cdot \cos(8x - \frac{3}{x^4+1})$

(c) $f_3'(x) = e^{-\frac{1}{1+x^2}} + x \cdot (-1) \cdot \frac{-1\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \cdot e^{-\frac{1}{1+x^2}} = e^{-\frac{1}{1+x^2}} + \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot e^{-\frac{1}{1+x^2}} = (1 + \frac{2x}{(1+x^2)^2}) \cdot e^{-\frac{1}{1+x^2}}$

(d) $f_4'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+4x+1}} \cdot (8x+4) - 2 = \frac{2(2x+1)}{\sqrt{4x^2+4x+1}} - 2 = 2\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{4x^2+4x+1}} - 2 = 2 \cdot \sqrt{1} - 2 = 2 - 2 = 0.$

Aufgabe H36 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 \cdot e^{-|x-5|}$.

(a) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f stetig, für welche differenzierbar?

(b) Wie lauten Abbildungsvorschrift und Definitionsmenge von f'?

(c) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g(x) = (x-5)^2 \cdot e^{-|x-5|}$ differenzierbar?

Lösung:

(a) Da f aus Funktionen zusammengesetzt ist, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, ist f selbst auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Es ist $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot e^{-x+5} & \text{für } x \leq 5 \\ x^2 \cdot e^{x-5} & \text{für } x > 5 \end{cases}$. Damit ist f für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{5\}$ differenzierbar, da f aus Funktionen zusammengesetzt ist, die dort differenzierbar sind. Für $x_0 = 5$ ist $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \nearrow 5} \frac{x^2 \cdot e^{x-5}-25}{x-5} = \lim\limits_{h \nearrow 0} \frac{(5+h)^2 \cdot e^h - 25}{h} = \lim\limits_{h \nearrow 0}(25 \cdot \frac{e^h-1}{h} + 10e^h + he^h) = 35$ und $\lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \searrow 5} \frac{x^2 \cdot e^{-x+5}-25}{x-5} = \lim\limits_{h \searrow 0} \frac{(5+h)^2 \cdot e^{-h} - 25}{h} = \lim\limits_{h \searrow 0}(25 \cdot \frac{e^{-h}-1}{h} + 10e^{-h} + he^{-h}) = -15$. Also ist f an der Stelle $x_0 = 5$ nicht differenzierbar.

(b) Es ist $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ und $f'(x) = \begin{cases} (2x + x^2) \cdot e^{x-5} & \text{für } x \leq 5 \\ (2x - x^2) \cdot e^{-x+5} & \text{für } x > 5 \end{cases}$.

(c) Mit denselben Überlegungen wie für f ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}\setminus\{5\}$. Zusätzlich stimmen für $x_0 = 5$ die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \nearrow 5} \frac{(x-5)^2 \cdot e^{x-5}-0}{x-5} = \lim\limits_{h \nearrow 0} \frac{h^2 \cdot e^h}{h} = \lim\limits_{h \nearrow 0}(he^h) = 0$ und $\lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \searrow 5} \frac{(x-5)^2 \cdot e^{-x+5}-0}{x-5} = \lim\limits_{h \searrow 0} \frac{h^2 \cdot e^{-h}}{h} = \lim\limits_{h \searrow 0}(he^{-h}) = 0$ überein. Damit ist g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Aufgabe H37 (Differentiation der Umkehrfunktion) (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von $f(x) = \tan x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Vereinfachen Sie soweit, bis Sie die Formel aus der Vorlesung erhalten.

(b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{e} x \cdot \ln x$ mit dem Definitionsbereich $D_f = [\frac{1}{e}, \infty)$. Berechnen Sie die erste Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $x_0 = 1$.

Lösung:

(a) Es ist $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, also ist f auf diesem Intervall injektiv und somit umkehrbar. Außerdem ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \arctan x$, $x \in f((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$, differenzierbar und ihre Ableitung ist $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Die Funktion f ist injektiv mit $f'(x) = \frac{1}{e}(\ln x + 1)$, $x \in [\frac{1}{e}, \infty)$, und es gilt $f(e) = 1$. Da f injektiv ist, ist e das einzige Urbild zu 1. Damit ist $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(e)} = \frac{2}{e}$.