Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
22./25. Januar 2010

10. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe W11 (Verkettungen mit der Sinusfunktion)
Diskutieren Sie für nachstehende Funktionen Definitionsbereich, Wertebereich und Periodizität:
(a) $f_1(x) = \frac{1}{\sin x}$ (b) $f_2(x) = 2^{\sin x}$ (c) $f_3(x) = \sin 2^x$

Aufgabe W12 (Funktionen skizzieren)
Es ist unter Benutzung nachstehender Anleitung die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ zu skizzieren:

1. Zeichnen Sie (alles wirklich dünn!!!) in ein $[x, y]$-Koordinatensystem die Funktion $y_1 = x^2$.
2. Konstruieren Sie daraus die Funktion $y_2 = -x^2$ durch Spiegelung von y_1 an der x-Achse.
3. Nun ist $y_3 = 1 - x^2$ zu zeichnen. Dazu verschieben wir die x-Achse um 1 nach unten – fertig!
4. Kommen wir schließlich zu $y = \frac{1}{1-x^2}$: Nehmen Sie einen beliebigen x-Wert und den dazugehörigen y_3-Wert und zeichnen Sie den Punkt $(x, \frac{1}{y_3})$ ein. Das nennt man „reziprokes Spiegeln“ am Geradenpaar $y = \pm 1$. Zeichnen Sie zur Veranschaulichung die Geraden $y = 1$ und $y = -1$ dünn in das Koordinatensystem ein. Erkennen Sie die Spiegelung?
5. Zeichnen Sie zum Abschluss das letzte Funktionsbild sowie das zweite Koordinatensystem dick nach – fertig ist die Skizze!

Multiple-Choice-Aufgaben

Aufgabe M3 (Determinante und Invertierbarkeit)
Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn gilt:

☐ Kein Element von A hat den Wert 0. ☒ A ist invertierbar.
☐ A ist nicht invertierbar. ☐ Der Rang von A ist nicht 0.

Aufgabe M4 (Rechenregeln für invertierbare Matrizen und ihre Determinanten)
Wie viele der folgenden vier Aussagen sind wahr? Für invertierbare Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt stets:

- $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $(A + B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$.

☐ keine ☒ eine ☐ zwei ☐ drei

Gruppenübung

Aufgabe G37 (Grenzwerte)

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte. Fertigen Sie eine Skizze an.

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3-7x+6}{x+3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\cdot\cos\frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)$ und $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x\le 1 \\ \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2} & \text{für } x>1 \end{cases}$

Lösung:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+2) = 5$,

$\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3-7x+6}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{(x^2-3x+2)(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3}(x^2-3x+2) = 20$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ existiert nicht,

da $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\cos\frac{1}{x}\right) = 0$,

da $0 \le |x\cdot\cos\frac{1}{x}| = |x|\cdot|\cos\frac{1}{x}| \le |x| \xrightarrow{x\to 0} 0$.

(c) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 1} x = 1$ und $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Aufgabe G38 (Stetige Ergänzung)

Können Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ derart definieren, dass die Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind?

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x\neq 0 \\ ? & \text{für } x=0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x<0 \\ ? & \text{für } x=0 \\ 1 & \text{für } x>0 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & \text{für } x\neq 0 \\ ? & \text{für } x=0 \end{cases}$

(d) $k(x) = \begin{cases} \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} & \text{für } x<0 \\ ? & \text{für } x=0 \\ n(x+1) & \text{für } x>0 \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$

Hinweis zu d): Verwenden Sie $\frac{z^n-1}{z-1} = 1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} z^i$ für $z\neq 1$, $n\in\mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Es ist $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 1$, daher ist die Funktion mit der Setzung $f(0) = 1$ stetig ergänzbar an der Stelle $x = 0$.

(b) Es ist $\lim\limits_{x\nearrow 0} g(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\searrow 0} g(x)$, daher ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ergänzbar.

(c) Es ist $\lim\limits_{x\nearrow 0} h(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\sin\frac{1}{x}) = 0$ mit einer ähnlichen Argumentation wie in Aufgabe G37 b). Daher ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ durch $h(0) = 0$ stetig ergänzbar.

(d) Es ist $\lim\limits_{x\nearrow 0} k(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = \lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{(e^x)^n-1}{e^x-1} \overset{\text{Hinweis}}{=} \lim\limits_{x\nearrow 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1}(e^x)^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\lim\limits_{x\nearrow 0}(e^x)^i\right) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 1 = n$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} k(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} n(x+1) = n$. Daher ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ durch $k(0) = n$ stetig ergänzbar.

Aufgabe G39 (Hyperbolische Funktionen)

Wir definieren die *hyperbolischen Funktionen* über die Exponentialfunktion:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad \coth x = \frac{\coth x}{\sinh x}\ (x \neq 0).$$

Zeigen Sie unter Benutzung der Definition die folgenden drei Identitäten:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (b) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ (c) $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$.

Lösung:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$
$= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

(b) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$
$= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}e^x e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh(2x).$

(c) $2\sinh x \cosh x = 2 \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \sinh(2x).$

Hausübung

Aufgabe H31 (Berechnung von Grenzwerten) (4 Punkte)

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-9}{(x+3)\sqrt{5x+40}}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3-4x^2+2}{5x^2+3x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to4} \frac{x+4}{(\sqrt{x}-2)x}$, $\lim\limits_{x\to4} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)x}$

(c) $\lim\limits_{x\nearrow1} f(x)$ und $\lim\limits_{x\searrow1} f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|} & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$.

Lösung:

(a) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-9}{(x+3)\sqrt{5x+40}} = \lim\limits_{x\to-3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)\sqrt{5x+40}} = \lim\limits_{x\to-3} \frac{x-3}{\sqrt{5x+40}} = -\frac{6}{5}$,

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3-4x^2+2}{5x^2+3x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \infty.$

(b) $\lim\limits_{x\to4} \frac{x+4}{(\sqrt{x}-2)x} = \infty$,

$\lim\limits_{x\to4} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)x} = \lim\limits_{x\to4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)x} = \lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{x}+2}{x} = 1.$

(c) $\lim\limits_{x\nearrow1} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow1} \frac{x-1}{|x-1|} \overset{x<1}{=} \lim\limits_{x\nearrow1} \frac{x-1}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\nearrow1} -1 = -1$ und

$\lim\limits_{x\searrow1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow1} \frac{x-1}{|x-1|} \overset{x>1}{=} \lim\limits_{x\searrow1} \frac{x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\searrow1} 1 = 1.$

Aufgabe H32 (Stetige Ergänzung) (2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{für } x < 0 \\ x^3 - 4a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ für $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$ in Abhängigkeit von a.

(b) Für welchen Wert von a lässt sich die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig ergänzen?

Lösung:

(a) Es ist $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} e^{3x} = 1$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} x^3 - 4a = -4a$.

(b) Damit sich die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig ergänzen lässt, muss $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$ gelten. Dies ist für $a = -\frac{1}{4}$ erfüllt. In diesem Fall lässt sich die Funktion durch die Setzung $f(0) = 1$ an der Stelle $x = 0$ stetig ergänzen.

Aufgabe H33 (Grenzwerte von Funktionenfolgen) (2 Punkte)

Betrachten Sie die stetigen (warum eigentlich stetig?) Funktionen

$$f_n(x) = e^{-n|x|},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

(a) Berechnen Sie den Grenzwert $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die so definierte Funktion f stetig?

Lösung:

(a) Es ist $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-n|x|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n|x|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(e^{|x|})^n} \overset{\substack{e^{|x|}>1 \\ \text{für } x \neq 0}}{=} 0$ für $x \neq 0$ und $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

(b) Der Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.
Diese ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und nicht stetig für $x = 0$, da an dieser Stelle der linkseitige und der rechtsseitige Grenzwert nicht mit dem Funktionswert übereinstimmen.

Aufgabe H34 (Umkehrfunktionen von hyperbolischen Funktionen) (4 Punkte)

Die Umkehrfunktionen arsinh und arcosh der hyperbolischen Funktionen sinh und cosh lassen sich über den natürlichen Logarithmus erklären. Zeigen Sie die folgenden beiden Identitäten:

(a) $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ für $x \geq 1$.

Lösung:

(a) Es ist $\operatorname{arsinh}(\sinh x) = \ln\left(\sinh x + \sqrt{\sinh^2 x + 1}\right) = \ln\left(\sinh x + \sqrt{\cosh^2 x}\right)$
$= \ln(\sinh x + \cosh x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x) = x$ und
$\sinh(\operatorname{arsinh} x) = \sinh\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}} = x.$
Daher ist $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ die Umkehrfunktion zu $\sinh x$.

(b) Es ist $\operatorname{arcosh}(\cosh x) = \ln\left(\cosh x + \sqrt{\cosh^2 x - 1}\right) = \ln\left(\cosh x + \sqrt{\sinh^2 x}\right)$
$= \ln(\cosh x + \sinh x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right) = \ln(e^x) = x$ und
$\cosh(\operatorname{arcosh} x) = \cosh\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} + e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} + e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)+1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} = x.$
Daher ist $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ die Umkehrfunktion zu $\cosh x$.