Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
15./18. Januar 2010

9. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe W9 (Fakultät und Binomialkoeffizient)

(a) Wiederholen Sie die Begriffe *Fakultät* und *Binomialkoeffizient* an folgenden Beispielen:

i. 0!, 1!, 2!, 3!, 4! und 5!, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ und $0! = 1$

ii. $\binom{4}{3}$ und $\binom{7}{3}$, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(b) Zeigen Sie die Identität $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

(c) Wie lassen sich die Binomialkoeffizienten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks berechnen?

Aufgabe W10 (Binomischer Lehrsatz)

Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

die Ausdrücke $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ und $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Multiple-Choice-Aufgaben

Aufgabe M1 (Orthogonale Vektoren)

Wie viele der folgenden vier Aussagen sind wahr? Für orthogonale Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt stets:

- $\vec{x} \cdot \vec{y}^T = 0$
- $\vec{x}^T \cdot \vec{y} = 0$
- $\vec{x} = \vec{y}$
- $\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2$.

☐ keine ☐ eine ☒ zwei ☐ drei

Aufgabe M2 (Ebenen und Normalenvektoren)

Für die Schnittmenge S dreier Ebenen in $\mathbb{R}^3$ gilt:

☐ Wenn S eine Gerade ist, dann sind zwei der Ebenen parallel.

☒ Wenn S eine Gerade ist, dann sind die Normalenvektoren der drei Ebenen linear abhängig.

☐ Wenn zwei Ebenen parallel sind, dann ist S eine Gerade.

☐ Wenn die Normalenvektoren der drei Ebenen linear abhängig sind, dann ist S eine Gerade.

Gruppenübung

Aufgabe G33 (Geometrische Reihe)

Wiederholen Sie den Begriff *Geometrische Reihe*. Finden Sie in den folgenden Darstellungen jeweils eine geometrische Reihe wieder, und berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 5}{3^{k+1}}$ (b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k}$.

Lösung:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 5}{3^{k+1}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{5}{3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \overset{|-\frac{1}{3}|<1}{=} \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

(b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k} = 8\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 8\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 - \frac{2}{3}\right) \overset{|\frac{2}{3}|<1}{=} 8\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{5}{3}\right) = 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$.

Aufgabe G34 (Partialbruchzerlegung und Teleskopreihe)

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b in der Darstellung $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Bestätigen Sie damit den Grenzwert der Teleskopreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$.

Lösung:

(a) Es ist $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} \Leftrightarrow 1 = (k+2)a + kb \Leftrightarrow 1 = (a+b)k + 2a$.
Daraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ 2a &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. Also gilt $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

Aufgabe G35 (Konvergenz von Reihen)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k^2}$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2+e^k}$.

Lösung:

(a) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$.

Somit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ nach dem Quotientenkriterium.

(b) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$.

Daher konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k^2}$ nach dem Wurzelkriterium.

(c) Es ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k} = \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Somit divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$, da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine divergente Minorante ist.

(d) Da $(a_n)_n$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ eine positive, monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ nach dem Leibnitzkriterium. Also konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

(e) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2}{2+e^{n+1}}}{\frac{n^2}{2+e^n}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2+e^n}{2+e^{n+1}} \right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2e^n}{e^{n+1}} \right) = \frac{2}{e} < 1.$

Daher konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2+e^k}$ nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe G36 (Umkehrfunktionen)

Berechnen Sie für folgende bijektive Funktionen die Umkehrfunktionen sowie die zu den Umkehrfunktionen gehörigen Definitionsbereiche:

(a) $f(x) = -2x + 1$ (b) $g(x) = \frac{x+1}{x}$ (c) $h(x) = e^{3x} - 4$.

Lösung:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -2x + 1$ ist bijektiv, also ist $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.
Es ist $f(x) = y = -2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$, daher ist $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist bijektiv, also ist $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Es ist $g(x) = y = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow xy = x + 1 \Leftrightarrow x(y-1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y-1}$, daher ist $g^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$.

(c) $h : \mathbb{R} \to (-4, \infty)$ mit $h(x) = e^{3x} - 4$ ist bijektiv, daraus folgt $D_{f^{-1}} = (-4, \infty)$.
Es ist $h(x) = y = e^{3x} - 4 \Leftrightarrow e^{3x} = y + 4 \Leftrightarrow 3x = \ln(y+4) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\ln(y+4)$, somit ist $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln(x+4)$.

Hausübung

Aufgabe H28 (Geometrische Reihe) (4 Punkte)

Finden Sie in den folgenden Darstellungen eine geometrische Reihe wieder, und berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:

(a) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{4^{2k-2} \cdot 7^{-k+1}}{2^{k-2}}$ (b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^{3k}$, für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{4^{2k-2} \cdot 7^{-k+1}}{2^{k-2}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{4^{2k+4} \cdot 7^{-k-2}}{2^{k+1}} = \frac{64 \cdot 49}{2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{16^k}{2^k \cdot 7^k} = 1568 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^k \overset{|\frac{8}{7} \geq 1|}{=} +\infty.$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^{3k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^6}{1+3x^2+3x^4+x^6} \right)^k \overset{\left|\frac{x^6}{1+3x^2+3x^4+x^6}\right|<1, \text{ für } x\in\mathbb{R}}{=} \frac{1}{1-\frac{x^6}{1+3x^2+3x^4+x^6}} = 1 + \frac{x^6}{1+3x^2+3x^4}.$

Aufgabe H29 (Konvergenz von Reihen) (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^{10}}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+2k}{1+k^2}$ (d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{1+k}$ (e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+3k^4}{2+8k^7}$.

Lösung:

(a) Da $(a_n)_n$ mit $a_n = \frac{(-3)^n}{n^{10}}$ keine Nullfolge ist, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^{10}}$ nicht.

(b) Es ist $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$, also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ nicht.

(c) Es ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+2k}{1+k^2} \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2+k^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.
Somit divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+2k}{1+k^2}$, da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine divergente Minorante ist.

(d) Da $(a_n)_n$ mit $a_n = \frac{1}{1+n}$ eine positive, monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{1+k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k}$ nach dem Leibnitzkriterium.

(e) Es ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+3k^4}{2+8k^7} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+3k^4}{4k^7} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4k^4}{4k^7} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.
Damit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+3k^4}{2+8k^7}$, da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante ist.

Aufgabe H30 (Umkehrfunktionen und Verkettungen) (4 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ und } g(x) = x + 3, \text{ definiert auf } D_f = D_g = (0, +\infty).$$

(a) Skizzieren Sie f und g. Untersuchen Sie die Funktionen auf Monotonie und Injektivität.

(b) Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktionen. Skizzieren Sie diese.

(c) Bilden Sie die Verkettung $h = f \circ g$. Untersuchen Sie auch diese auf Monotonie und Injektivität, und bilden Sie auf direktem Wege ihre Umkehrfunktion.

(d) Für die Umkehrfunktion h^{-1} von $h = f \circ g$ gilt $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Verifizieren Sie daran Ihr Resultat aus (c).

Lösung:

(a) Für $x, y \in D_f$ ist $f(x) > f(y) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow y^2 > x^2 \Leftrightarrow y > x$. Also ist f streng monoton fallend und daher injektiv auf D_f.
Für $x, y \in D_g$ ist $g(x) > g(y) \Leftrightarrow x + 3 > y + 3 \Leftrightarrow x > y$. Also ist g streng monoton steigend und daher injektiv auf D_g.

(b) Da f auf D_f injektiv ist, existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf $D_{f^{-1}} = f(D_f) = (0, +\infty)$.
Für $x \in D_f$ ist $f(x) = y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Also ist $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x \in D_{f^{-1}}$.
Da g auf D_g injektiv ist, existiert die Umkehrfunktion g^{-1} auf $D_{g^{-1}} = g(D_g) = (3, +\infty)$.
Für $x \in D_g$ ist $g(x) = y = x + 3 \Leftrightarrow x = y - 3$. Also ist $g^{-1}(x) = x - 3$ für $x \in D_{g^{-1}}$.

(c) Es ist $h(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = \frac{1}{(x+3)^2}$ auf $D_h = g^{-1}(D_f) = (0, +\infty)$. Für $x, y \in D_h$ ist $h(x) > h(y) \Leftrightarrow \frac{1}{(x+3)^2} > \frac{1}{(y+3)^2} \Leftrightarrow (y + 3)^2 > (x + 3)^2 \Leftrightarrow y + 3 > x + 3 \Leftrightarrow y > x$. Damit ist h streng monoton fallend und somit injektiv auf D_h.
Für $x \in D_h$ ist $h(x) = y = \frac{1}{(x+3)^2} \Leftrightarrow (x + 3)^2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x + 3 = \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y}} - 3$. Somit ist $h^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3$ auf $D_{h^{-1}} = h(D_h) = (0, \frac{1}{9})$.

(d) Es ist $h^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3$ für $x \in D_{h^{-1}}$. Dies bestätigt das Ergebnis aus (c).