Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10

Probeklausur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Name: .... | Fachrichtung: ....

Vorname: .... | Wiederholer: ....

Matrikelnummer: ....

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in dieses Deckblatt einlegen und mit diesem persönlich abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60	
erreichte Punktzahl								

Hilfsmittel: *Als Hilfsmittel sind 4 A4-Blätter mit eigen-handschriftlichen Aufzeichnungen zugelassen.*

Geben Sie bitte **sämtliche** *Zwischenergebnisse bei der Lösung der Aufgaben an. Rechnen Sie, wenn nicht anders verlangt, mit Brüchen, Wurzeln usw.*

Hinweis zur Klausur: *Die Klausur wird der Probeklausur vom Umfang und Schwierigkeit in etwa entsprechen.*

1. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{b_1} \quad \text{und} \quad A\vec{x} = \vec{b_2},$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Lösung: Wir lösen die beiden Gleichungssysteme nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{ccc|cc}
1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\
0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\
0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}$$

Setzen wir für die rechte Seite $\vec{b_1}$: $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, so ergibt sich $x_2 = 2 - t$ und $x_1 = 1 + 4t$. Somit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die rechte Seite $\vec{b_2}$ ergibt die letzte Zeile einen Widerspruch. Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2 = \{\ \}$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 + \alpha^2 x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung: Wir lösen das Gleichungssystem nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & \alpha^2 & \alpha \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & \alpha^2-2 & \alpha-3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array}$$

Für $\alpha \neq \pm 1$ ist die Lösung eindeutig. Es ist $x_3 = \frac{1}{\alpha+1}$, $x_2 = \frac{1}{2}(-2 + \frac{1}{\alpha+1})$ und $x_1 = 5 - \frac{3}{\alpha+1}$.

Für $\alpha = 1$ gibt es unendlich viele Lösungen. Setzen wir $x_3 = 2t$, $t \in \mathbb{R}$, so ist $x_2 = -1 + t$ und $x_1 = 5 - 6t$. Die Lösungsmenge ist somit

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5-6t \\ -1+t \\ 2t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für $\alpha = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, da die letzte Zeile einen Widerspruch ergibt.

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; r, \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

in $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie eine implizite Form der Ebene E.

(b) Gegeben sei die Gerade

$$G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \; 2x_1 + 3x_2 = 5\}$$

in $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden G.

Lösung:

(a) Durch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

erhalten wir einen Normalenvektor der Ebene. Da der Punkt $(1, \, 1, \, 0)^T$ auf der Ebene liegen muss, erhalten wir

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1\}.$$

(b) Für einen Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ auf der Geraden ist $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2$. Setzen wir $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, so erhalten wir $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}t$ und

$$G = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben sei die Ebene

$$E := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \, r, \, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene.

(b) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene zum Ursprung.

(c) Liegt der Punkt $P := (2, \, -1, \, -2)^T$ in der Ebene E?

Lösung:

(a) Ein Normalenvektor von E ist gegeben durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normieren wir $\vec{n}$, so erhalten wir

$$\vec{n_0} = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da der Punkt $(1, \, 0, \, 0)^T$ auf der Ebene liegen muss, ist

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - x_2 + x_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

die Hesse-Normalform von E.

(b) Der Abstand der Ebene E zum Ursprung beträgt

$$\mathrm{d}(\vec{0}, \, E) = \left| \frac{1}{\sqrt{3}}(0 - 0 + 0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(c) Es ist $\frac{1}{\sqrt{3}}(2 - (-1) + (-2)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Somit liegt der Punkt P in der Ebene E.

5. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(b) Hat das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung?

(c) Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert -1.

Lösung:

(a) Die Eigenwerte von A erhalten wir aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) - 6) = (1-\lambda)(1+\lambda)(4-\lambda) \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte -1, 1 und 4.

(b) Da $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A ist, ist A invertierbar. Somit ist das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ lösbar.

(c) Der Eigenraum von A zum Eigenwert -1 ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(A + 1 \cdot E)\vec{x} = \vec{0}$. Wir lösen das Gleichungssystem nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Setzen wir $x_3 = 6t$, so erhalten wir $x_2 = -2t$ und $x_1 = -7t$. Somit ist

$$E_{-1} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = t \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

der Eigenraum von A zum Eigenwert -1.

6. Aufgabe (10 Punkte)

Sei φ die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung mit Winkel 90° und ψ die Spiegelung an der x_2-Achse. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\varphi \circ \psi$ bezüglich der Standardbasis.

Lösung: Sind A und B die Abbildungsmatrizen von φ und ψ bezüglich der Standardbasis, so ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist C die Abbildungsmatrix von $\varphi \circ \psi$, so gilt bezüglich der Standardbasis

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$