Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
18. Dezember 2009/11. Januar 2010

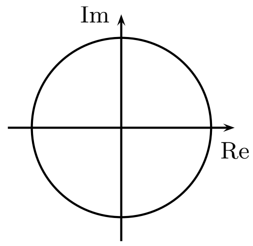
8. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Gruppenübung

Aufgabe G27 (Zum Einstieg in die komplexen Zahlen)

(a) Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

z	1	i	-1	$-i$
$\mathrm{Re}(z)$				
$\mathrm{Im}(z)$				
$\arg(z)$				



und tragen Sie die Zahlen in die vorgefertigte Skizze ab.

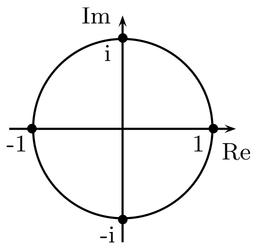
(b) Bestimmen Sie Betrag und Argument folgender komplexer Zahlen:
i. $z = -1,5i$ ii. $z = 2 - 2i$ iii. $z = 2e^{i\pi}$.

(c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:
i. $z = \frac{5}{1-3i}$ ii. $z = \frac{4+i}{1-i} + 7i$ iii. $z = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Lösung:

(a) Ausgefüllt sehen Tabelle und Skizze so aus:

z	1	i	-1	$-i$
$\mathrm{Re}(z)$	1	0	-1	0
$\mathrm{Im}(z)$	0	1	0	-1
$\arg(z)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$



(b) Es ergeben sich folgende Beträge und Argumente:

i. $z = -1,5i \Rightarrow |z| = 1,5$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} \widehat{=} \frac{3}{2}\pi$.

ii. $z = 2 - 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{4} \widehat{=} \frac{3}{4}\pi$.

iii. $z = 2e^{i\pi} \Rightarrow |z| = 2$, $\arg(z) = \pi$.

(c) Es ergeben sich folgende Real- und Imaginärteile:

i. $z = \frac{5}{1-3i} = \frac{5(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{5+15i}{1+9} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{3}{2}$.

ii. $z = \frac{4+i}{1-i} + 7i = \frac{(4+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 7i = \frac{3+5i}{1+1} + 7i = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i + 7i = \frac{3}{2} + \frac{19}{2}i$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{19}{2}$.

iii. $z = 3e^{-i\frac{\pi}{2}} = 3e^{i\frac{3}{2}\pi} = -3i$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = -3$.

Aufgabe G28 (Wurzeln komplexer Zahlen)

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen unter Zuhilfenahme der Darstellung $z = re^{i\varphi}$. Skizzieren Sie Ihre Lösungen jeweils in der komplexen Zahlenebene.

(a) $z^2 = -9$ (b) $z^3 = 8i$ (c) $\frac{z-1}{2} = \frac{\frac{i}{2}}{z+1}$ $(z \neq -1)$

Lösung:

(a) $z^2 = -9 \overset{!}{=} (re^{i\varphi})^2 = r^2e^{2i\varphi}$
$\Rightarrow r = 3$ und $e^{2i\varphi} \overset{!}{=} -1 = e^{i\pi} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$
$\Rightarrow z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$, $z_2 = 3e^{i\frac{3}{2}\pi} = -3i$.

(b) $z^3 = 8i \overset{!}{=} (re^{i\varphi})^3 = r^3e^{3i\varphi}$
$\Rightarrow r = 2$ und $e^{3i\varphi} \overset{!}{=} i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{5}{6}\pi$, $\varphi_3 = \frac{9}{6}\pi$
$\Rightarrow z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2e^{\frac{5}{6}\pi}$, $z_3 = 2e^{\frac{9}{6}\pi}$.

(c) $\frac{z-1}{2} = \frac{\frac{i}{2}}{z+1} \overset{z\neq -1}{\Leftrightarrow} (z+1)(z-1) = i \Leftrightarrow z^2 - 1 = i \Leftrightarrow z^2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \overset{!}{=} (re^{i\varphi})^2 = r^2e^{2i\varphi}$
$\Rightarrow r = \sqrt[4]{2}$ und $e^{2i\varphi} \overset{!}{=} e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{8}$, $\varphi_2 = \frac{9}{8}\pi$
$\Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9}{8}\pi}$.

Aufgabe G29 (Konvergenz und bestimmte Divergenz)

(a) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{2n+1}$ gegen $g = \frac{1}{2}$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

Lösung:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ ist $|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}| = |\frac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)}| = |\frac{-1}{4n+2}| = \frac{1}{4n+2} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$.
Mit diesem Ergebnis können wir beweisen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{2n+1}$ gegen $g = \frac{1}{2}$ konvergiert: Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 = \lceil \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon} \rceil$. Dann ist für alle $n > n_0$:
$|a_n - g| = |\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}| = |\frac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)}| = |\frac{-1}{4n+2}| = \frac{1}{4n+2} < \frac{1}{4\frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}+2} = \frac{1}{\frac{1-2\epsilon}{\epsilon}+2} = \frac{\epsilon}{1-2\epsilon+2\epsilon} = \frac{\epsilon}{1} = \epsilon$.
Damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $g = \frac{1}{2}$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in R$ ist $\frac{n^2+1}{n+1} > \frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{2n} = \frac{1}{2}n > a \Leftrightarrow n > 2a$.
Mit diesem Ergebnis können wir beweisen, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert: Sei $a \in \mathbb{R}$. Wähle $n_0 = \lceil 2a \rceil$. Dann ist für alle $n > n_0$:
$bn = \frac{n^2+1}{n+1} > \frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{2n} = \frac{1}{2}n > \frac{1}{2} \cdot 2a = a$.
Damit divergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$.

Aufgabe G30 (Konvergenzuntersuchung I)

Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz:

(a) $a_n = -3n + 2$
(b) $b_n = \frac{4n^3+7n+1}{13n^2-1}$
(c) $c_n = \frac{2n^4+2n^3+4n}{4n^{12}+3n^3-n^2+1}$
(d) $d_n = \left(1 + \frac{1}{7n+1}\right)^{1000}$
(e) $e_n = 3^n - 1$
(f) $f_n = \frac{1}{2^n+1}$
(g) $g_n = \frac{2^n+1}{2^{2n}-1}$
(h) $h_n = \sqrt{n+1}$
(i) $i_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$
(j) $j_n = \sqrt[n]{23} + \frac{1}{n}$.

Lösung:

(a) $a_n = -3n + 2$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$.

(b) $b_n = \frac{4n^3+7n+1}{13n^2-1} = \frac{4n+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}{13-\frac{1}{n}}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

(c) $c_n = \frac{2n^4+2n^3+4n}{4n^{12}+3n^3-n^2+1} = \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^3}}{4n^8+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}$ konvergiert gegen 0.

(d) $d_n = \left(1 + \frac{1}{7n+1}\right)^{1000} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{7n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{7n+1}\right)}_{1000 mal}$ konvergiert gegen 1.

(e) $e_n = 3^n - 1$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

(f) $f_n = \frac{1}{2^n+1}$ konvergiert gegen 0.

(g) $g_n = \frac{2^n+1}{2^{2n}-1} = \frac{2^n+1}{(2^n+1)(2^n-1)} = \frac{1}{2^n-1}$ konvergiert gegen 0.

(h) $h_n = \sqrt{n+1}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

(i) $i_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ konvergiert gegen 0.

(j) $j_n = \sqrt[n]{23} + \frac{1}{n}$ konvergiert gegen $1 + 0 = 1$ (siehe Grenzwert-Formeln unten).

Aufgabe G31 (Eigenschaften von Folgen)

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Folge $(a_n)_n$ mit nachstehenden Eigenschaften:

(a) $(a_n)_n$ ist monoton steigend und besitzt den Grenzwert 2.

(b) $(a_n)_n$ ist monoton fallend, es gilt $2 < a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sie besitzt den Grenzwert 2.

(c) $(a_n)_n$ ist alternierend, beschränkt und divergent.

(d) $(a_n)_n$ ist alternierend und konvergent.

Lösung:

(a) $a_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ ist monoton steigend und besitzt Grenzwert 2.

(b) $a_n = 2 + \frac{3}{n+1}$ ist monoton fallend, es gilt $2 < a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge besitzt den Grenzwert 2.

(c) $a_n = (-1)^n$ alterniert, ist beschränkt, da $a_n \in [-1, 1]$ für alle $n \in N$ gilt, und ist divergent.

(d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ alterniert und konvergiert gegen 0.

Aufgabe G32 (Konvergenzuntersuchung II)

Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz:

(a) $a_n = \sqrt{n^2+7} - n$ (b) $b_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$ (c) $c_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$.

(Hinweis: Es ist $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$.)

Lösung:

(a) $a_n = \sqrt{n^2+7} - n = \frac{(\sqrt{n^2+7}-n)(\sqrt{n^2+7}+n)}{\sqrt{n^2+7}+n} = \frac{n^2+7-n^2}{\sqrt{n^2+7}+n} = \frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n}$ konvergiert gegen 0.

(b) $b_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n = \frac{(\sqrt{4n^2+n}-2n)(\sqrt{4n^2+n}+2n)}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}$

konvergiert gegen $\frac{1}{4}$.

(c) $c_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \frac{n^2+n-n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}$

divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

Hausübung

Aufgabe H23 (Komplexe Polynome) (2 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ Lösung der Gleichung ist.

Lösung: Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch $\overline{z}$ eine Lösung der Gleichung.

Aufgabe H24 (Wurzeln komplexer Zahlen) (2 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 + 81i = 0$ unter Zuhilfenahme der Darstellung $z = re^{i\varphi}$. Skizzieren Sie Ihre Lösungen in der komplexen Zahlenebene.

Lösung: $z^4 + 81i = 0 \Leftrightarrow z^4 = -81i \stackrel{!}{=} (re^{i\varphi})^4 = r^4 e^{4i\varphi}$

$\Rightarrow r = 3$ und $e^{4i\varphi} \stackrel{!}{=} -i = e^{i\frac{3}{2}\pi} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{3}{8}\pi$, $\varphi_2 = \frac{7}{8}\pi$, $\varphi_3 = \frac{11}{8}\pi$, $\varphi_4 = \frac{15}{8}\pi$

$\Rightarrow z_1 = 3e^{i\frac{3}{8}\pi}$, $z_2 = 3e^{i\frac{7}{8}\pi}$, $z_3 = 3e^{i\frac{11}{8}\pi}$, $z_4 = 3e^{i\frac{15}{8}\pi}$.

Aufgabe H25 (Geraden und Kreise in der komplexen Zahlenebene) (4 Zusatz - Punkte)

Seien $s, t \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $a\overline{a} - st > 0$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $sz\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} = 0$

(a) für $s = 0$ eine Gerade

(b) für $s \neq 0$ einen Kreis

in der komplexen Ebene beschreibt. Bestimmen Sie in (b) insbesondere Mittelpunkt und Radius des Kreises.

Lösung:

(a) Ist $s = 0$, so reduziert sich die Gleichung zu: $\overline{a}z + a\overline{z} = 0$. Setze $a := a_1 + ia_2$ und $z := x + iy$, a_1, a_2, x, $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a_1 - ia_2)(x + iy) + (a_1 + ia_2)(x - iy) = 2a_1x + 2a_2y \overset{!}{=} 0,$$

und somit $a_1x + a_2y = 0$, was die Gleichung einer Geraden ist.

(b) Ist $s \neq 0$, so gilt

$$s(x + iy)(x - iy) + (a_1 - ia_2)(x + iy) + (a_1 + a_2)(x - iy) = s(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2a_2y \overset{!}{=} 0,$$

und somit $x^2 + y^2 + \frac{2a_1}{s}x + \frac{2a_2}{s}y = 0$, was sich mit quadratischer Ergänzung zu der Kreisgleichung $(x + \frac{a_1}{s})^2 + (y + \frac{a_2}{s})^2 = \frac{a_1^2+a_2^2}{s^2}$ ergänzen lässt. Der Mittelpunkt des Kreises ist somit $M = (-\frac{a_1}{s}, -\frac{a_2}{s})$, sein Radius $r = \frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{s}$.

Aufgabe H26 (Konvergenzuntersuchung I) (4 Punkte)

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

(a) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{2n}} - \sqrt{n}$ (b) $b_n = \frac{4n^3-10n^2+5}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{5+3n}$ (c) $c_n = \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{2n}} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+\sqrt{2n}}-\sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{2n}}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{2n}}+\sqrt{n}} = \frac{n+\sqrt{2n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{2n}}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{n}}}+1}$

konvergiert gegen $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(b) $b_n = \frac{4n^3-10n^2+5}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{5+3n} = \frac{4n^3-10n^2+5}{8n^3+12n^2+6n+1} \cdot \frac{1}{\frac{5}{\sqrt[n]{n!}}+\frac{3n}{\sqrt[n]{n!}}} = \frac{4-\frac{10}{n}+\frac{5}{n^3}}{8+\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \cdot \frac{1}{\frac{5}{\sqrt[n]{n!}}+\frac{3n}{\sqrt[n]{n!}}}$
konvergiert gegen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3e} = \frac{1}{6e}$ (siehe Grenzwert-Formeln unten).

(c) $c_n = \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n = \left(1 + \frac{-\frac{x^2}{2}}{n}\right)^n \overset{m:=-\frac{n}{\frac{x^2}{2}}}{=} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-m\cdot\frac{x^2}{2}} = \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{-\frac{x^2}{2}}$

konvergiert gegen $e^{-\frac{x^2}{2}}$ (siehe Grenzwert-Formeln unten).

Aufgabe H27 (Konvergenzuntersuchung II) (4 Punkte)

Untersuchen Sie nachstehende Folge auf Monotonie und Konvergenz:

$$a_n = \frac{1}{2n^2+n} + \frac{2}{2n^2+n} + \frac{3}{2n^2+n} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n} = \frac{1}{2n^2+n}\sum_{k=1}^{n} k.$$

(Hinweis: Wie kann man die Summe $1+2+3+\cdots+n$ in kompakter Form darstellen?)

Lösung: $a_n = \frac{1}{2n^2+n} + \frac{2}{2n^2+n} + \frac{3}{2n^2+n} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n} = \frac{1}{2n^2+n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2n^2+n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{4n+2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}}$ konvergiert gegen $\frac{1}{4}$.

Es ist $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2(n+1)^2+n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k - \frac{1}{2n^2+n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+2}{4n+6} - \frac{n+1}{4n+2} = \frac{-2}{(4n+6)(4n+2)} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, somit ist die Folge streng monoton fallend.

Folgende Grenzwerte sollten Sie kennen:

$\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1 \quad \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$\frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty \quad \frac{a^n}{n^k} \longrightarrow \infty \quad (a > 1,\ k\,\text{fest}) \quad \frac{a^n}{n^k} \longrightarrow 0 \quad (0 < a < 1,\ k\,\text{fest})$

$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow e$ Stirlingsche Formel: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.