Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
7./11. Dezember 2009

# Wiederholungsübung zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Geradenscharen und Ebenen)
Für $t \in \mathbb{R}$ seien die beiden Geradenscharen

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5+t \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -t \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$

im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Untersuchen Sie für beide Geradenscharen, ob die zu der Schar gehörenden Geraden jeweils in einer gemeinsamen Ebene liegen.

**Lösung:** Wir betrachten zunächst die Geradenschar $g_t$. Jeder Punkt $\vec{x}$, der auf einer dieser Geraden liegt, ist von der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5+t \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+t+\lambda\cos t \\ 2+\lambda\sin t \\ -7 \end{pmatrix},\ \lambda,\, t \in \mathbb{R}.$$

Somit liegen alle Geraden $g_t$ für $t \in \mathbb{R}$ in der gemeinsamen Ebene $E_1 : x_3 = -7$.

Für die Geradenschar $h_t$ können wir die beiden Punkte

$$\big(1,\, 1,\, 2\big)^T \text{ und } \big(2,\, 3,\, 1\big)^T$$

bestimmen, die auf der Geraden $h_1$ liegen, sowie den Punkt

$$\big(1,\, 2,\, 2\big)^T,$$

der auf der Geraden $h_2$ liegt. Diese drei Punkte liegen, wie man leicht nachrechnen kann, in der gemeinsamen Ebene $E_2 : x_1 + x_3 = 3$. Alle anderen Punkte, die auf einer der Geraden $h_t$ liegen, sind von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\mu t \\ t+2\mu \\ 2-\mu t \end{pmatrix},\ \lambda,\, t \in \mathbb{R}.$$

Daher liegen sie, wie man durch Einsetzen nachrechnen kann, ebenfalls in der Ebene $E_2$, und damit auch alle Geraden der Geradenschar $h_t$.

**Aufgabe G2** (Lineare Unabhängigkeit)

Zeigen Sie, dass je drei paarweise verschiedene Vektoren aus der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ linear unabhängig sind.

**Lösung:** Wir wollen für drei paarweise verschiedene Parameter $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ beweisen, dass die zugehörigen Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \end{pmatrix}^T \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & c & c^2 \end{pmatrix}^T$$

linear unabhängig sind. Dies können wir erreichen, indem wir diese Vektoren, als Spalten in eine $3 \times 3$-Matrix schreiben und mit Hilfe ihrer Determinante nachprüfen, ob diese Matrix vollen Rang hat (siehe Aufgabe G4 a)). Ist das der Fall, so wissen wir, dass die Spalten dieser Matrix und somit die obigen Vektoren linear unabhängig sind.
Es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix},$$

wobei wir im zweiten Schritt nach der ersten Zeile entwickelt haben. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} &= (b-a)\left(c^2-a^2\right) - \left(b^2-a^2\right)(c-a) \\ &= (b-a)(c-a)\left((c+a)-(b+a)\right) = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0, \end{aligned}$$

da wir angenommen hatten, dass $a$, $b$ und $c$ paarweise verschieden sind. Damit sind die obigen drei Vektoren linear unabhängig.
Alternativ hätten wir den Beweis auch über die Definition der linearen Unabhängigkeit führen können.

**Aufgabe G3** (Determinante und Spur)

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils die Determinante und die Spur der Matrizen $A$, $B$, $2 \cdot A$, $3 \cdot A$, $A + B$ und $A \cdot B$. Was fällt Ihnen auf?

**Lösung:** Es ist $\det(A) = 15$, $\det(B) = 32$, $\det(2 \cdot A) = 60$, $\det(3 \cdot A) = 135$, $\det(A+B) = 78$, sowie $\det(A \cdot B) = 480$.
Damit gilt $\det(2 \cdot A) = 4 \cdot \det(A)$, $\det(3 \cdot A) = 9 \cdot \det(A)$, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ und $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
Weiter ist $\operatorname{tr}(A) = 8$, $\operatorname{tr}(B) = 11$, $\operatorname{tr}(2 \cdot A) = 16$, $\operatorname{tr}(3 \cdot A) = 24$, $\operatorname{tr}(A+B) = 19$, sowie $\operatorname{tr}(A \cdot B) = 57$.
Damit gilt $\operatorname{tr}(2 \cdot A) = 2 \cdot \operatorname{tr}(A)$, $\operatorname{tr}(3 \cdot A) = 3 \cdot \operatorname{tr}(A)$, $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ und $\operatorname{tr}(A \cdot B) \neq \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B)$.

Dies bestätigt die allgemeinen Rechenregeln für die Determinante und die Spur einer Matrix.

**Aufgabe G4** (Determinante, Rang und Invertierbarkeit einer Matrix)

(a) Begründen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann vollen Rang hat, wenn für ihre Determinante $\det(A) \neq 0$ gilt.

(b) Begründen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann invertierbar ist, wenn sie vollen Rang hat.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Begründen Sie, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann für jede rechte Seite $b \in R^n$ eindeutig lösbar ist, wenn $A$ invertierbar ist. Wie sieht in diesem Fall die Lösung des Gleichungssystems aus?

(d) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Determinante von $A$, dass $A$ invertierbar ist und berechnen Sie die Inverse $A^{-1}$ von $A$. Berechnen Sie mit Hilfe der Inversen die nach c) eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

**Lösung:**

(a) Besitzt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vollen Rang, so sind nach Definition ihre Spalten linear unabhängig. Bringt man die Matrix $A$ durch elementare Spaltenumformungen in Zeilen-Stufen-Form $A'$, so folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Spalten, dass alle Diagonalelemente der Matrix $A'$ ungleich 0 sind, andernfalls ließe sich eine Spalte als Linearkombination der anderen darstellen. Seien $a'_{ii}$, $1 \leq i \leq n$, die Diagonalelemente von $A'$, dann gilt für die Determinante von $A$: $|\det(A)| = |\det(A')| = |\prod_{i=1}^{n} a'_{ii}| \neq 0$, da sich die Determinante einer Matrix unter elementaren Spaltenumformungen höchstens um das Vorzeichen ändert.
Besitzt umgekehrt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht vollen Rang, so bedeutet dies, dass sich eine ihrer Spalten als Linearkombination der anderen darstellen lässt. Nach den Rechenregeln der Determinante gilt somit: $\det(A) = 0$.

(b) Ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so gibt es eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Für die Determinante der Matrix $A$ gilt somit: $1 = \det(E) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$, woraus folgt, dass die Determinante der Matrix $A$ nicht 0 sein kann. Aus Teil a) folgt, dass die Matrix $A$ vollen Rang hat.
Hat umgekehrt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vollen Rang, so lässt sich das in Beispiel 3.11 im Skript dargestellte Schema zur Invertierung einer Matrix anwenden, wobei die Diagonalelemente einer Zeilen-Stufen-Form $A'$ von $A$ alle ungleich 0 sind. Somit lässt sich aus diesem Verfahren eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ berechnen, für die gilt: $A \cdot B = B \cdot A = E$. Damit ist die Matrix $A$ invertierbar.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es lasse sich das Gleichungssystem $Ax = b$ für jede rechte Seite eindeutig lösen. Somit lässt sich insbesondere das Matrixgleichungssystem $A \cdot X = E$ eindeutig lösen, wo die rechten Seiten genau die Standardbasisvektoren sind. Damit erfüllt die Lösung $X$ dieses Matrixgleichungssystems die Bedingung $A \cdot X = E$ und es gilt $A \cdot X \cdot A = A$, woraus folgt: $X \cdot A = E$. Damit ist $X$ die zur Matrix $A$ inverse Matrix und die Matrix $A$ somit invertierbar.
Sei umgekehrt $A$ invertierbar. Dann gibt es eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Dann gilt für jede Lösung $x$ des Gleichungssystems $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$: $A^{-1} \cdot Ax = A^{-1}b$ und somit $x = A^{-1}b$, da $Ex = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. $x = A^{-1}b$ ist eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, da $A \cdot A^{-1}b = Eb = b$ gilt. Somit ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für jede rechte Seite $b$ eindeutig lösbar und die Lösung hat die Form $x = A^{-1}b$.

(d) Die Determinante von $A$ hat den Wert $-4$, wie man nachrechnen kann. Damit folgt aus a) und b) zusammen, dass die Matrix $A$ invertierbar ist. Wir berechnen die Inverse von $A$ nach folgenden Schema:

$$
\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -4 & -6 & -2 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 2 & 0 & -4 & 5 & 5 \\
0 & 4 & 0 & -4 & 6 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 2 & 0 & -4 & 5 & 5 \\
0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -2 & 2 & \frac{5}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1
\end{array}
$$

Die inverse Matrix zu $A$ ist somit $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 8 & 10 \\ -4 & 6 & 5 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist nach Teil c) $x = A^{-1}b = \big(3,\ 4,\ -2\big)^T$.

**Aufgabe G5** (Verkettung von linearen Abbildungen)

Gegeben seien die Punkte $P = \big(0,\, 0\big)^T$, $Q = \big(2,\, 0\big)^T$ und $R = \big(1,\, 1\big)^T$, die die Eckpunkte des Dreiecks $\Delta$ in $\mathbb{R}^2$ bilden.

Sei $T_A$ die durch die Matrix $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung.

(a) Berechnen Sie das Bilddreieck $\Delta'$ von $\Delta$ unter $T_A$ und skizzieren Sie $\Delta$ und $\Delta'$ in einem Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie die Determinante von $A$, sowie die Flächeninhalte der Dreiecke $\Delta$ und $\Delta'$.

(c) Wie lässt sich die durch $A$ gegebene lineare Abbildung geometrisch beschreiben? Fassen Sie $T_A$ als Hintereinanderausführung von zwei elementaren geometrischen Abbildungen auf und geben Sie für die zugehörigen linearen Abbildungen $T_B$ und $T_C$ die jeweiligen Abbildungsmatrizen $B$ und $C$ an.

(d) Berechnen Sie die beiden Matrixprodukte $B \cdot C$ und $C \cdot B$. Was fällt Ihnen auf?

**Lösung:**

(a) Die Eckpunkte des Bilddreiecks $\Delta'$ sind $P' = \big(0,\, 0\big)^T$, $Q' = \sqrt{2}\,\big(2,\, 2\big)^T$ und $R' = \sqrt{2}\,\big(\frac{1}{2},\, \frac{3}{2}\big)^T$.

(b) Es gilt $\det(A) = (\sqrt{2})^2 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2$. Für die Flächeninhalte der Dreiecke $\Delta$ und $\Delta'$ gilt

$$A_\Delta = \tfrac{1}{2}\cdot\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \| = \tfrac{1}{2}\cdot\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \| = 1 \text{ und } A_{\Delta'} = \tfrac{1}{2}\cdot\|\sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \| = \tfrac{1}{2}\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2,$$

was die für lineare Abbildungen allgemeingültige Aussage, dass sich Flächeninhalte unter einer linearen Abbildung $T$ um den Faktor $\det(T)$ verändern, bestätigt.

(c) $T_A$ ist die Hintereinanderausführung einer Streckung in Richtung der x-Achse um den Faktor 2 und einer anschließenden Drehung um den Ursprung um den Winkel 45°. Bezeichnen wir diese linearen Abbildungen mit $T_B$ und $T_C$, so sind die zugehörigen Abbildungsmatrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(d) Es ist $B \cdot C \neq C \cdot B = A$. Dies bedeutet, dass die beiden linearen Abbildungen $T_B$ und $T_C$ nicht miteinander vertauschen. Im Allgemeinen gilt für zwei lineare Abbildungen $T_B$ und $T_C$ und die zugehörigen Abbildungsmatrizen $B$ und $C$: $B \cdot C \neq C \cdot B$. Ist $T_A$ die Hintereinanderausführung von $T_B$ und $T_C$, wobei $T_B$ zuerst ausgeführt wird, so gilt für die zugehörigen Abbildungsmatrizen $A$, $B$ und $C$: $A = C \cdot B$.

**Aufgabe G6** (Basiswechsel bei linearen Abbildungen)

Sei $T_S$ die lineare Abbildung, die einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ an der Ebene $E : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ spiegelt.

(a) Bestimmen Sie eine möglichst geeignete Basis $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ des $\mathbb{R}^3$, um die zu $T_S$ gehörige Abbildungsmatrix $S_{B'}$ bezüglich $B'$ anzugeben. (Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Vektoren von der linearen Abbildung unverändert gelassen werden, und welche Rolle der Normalenvektor der Ebene spielt.)

(b) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix $V$, welche die oben gewählte Basis in die Standardbasis $B$ des $\mathbb{R}^3$ transformiert, sowie ihre Inverse $V^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie die zu $T_S$ gehörige Abbildungsmatrix $S_B$ bezüglich $B$.

**Lösung:**

(a) Eine geeignete Basis $B'$ besteht aus dem Normalenvektor $b'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ der Ebene E, da dieser gerade auf sein Negatives abgebildet wird, sowie aus den beiden Spannvektoren $b'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$ und $b'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$ von $E$ in Parameterform, da diese von der Spiegelung unverändert gelassen werden.

Die Abbildungsmatrix $S_{B'}$ bezüglich der Basis $B'$ ist $S_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Es ist $V = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $V^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

(c) Es gilt $S_B = V S_{B'} V^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Aufgabe G7** (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, sowie die Matrizen $A_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von $A_\lambda$ in Abhängigkeit von $\lambda$. (Das so erhaltene Polynom in $\lambda$ heißt *charakteristisches Polynom* der Matrix A.)

(b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von $\lambda$, für die $\det(A_\lambda) = 0$ gilt. (Diese Werte von $\lambda$ heißen *Eigenwerte* der Matrix A.)

(c) Bestimmen Sie für die in b) erhaltenen Werte von $\lambda$ die Kerne der zugehörigen Matrizen $A_\lambda$. (Dies sind die sogenannten *Eigenräume* der Matrix A.)

(d) Verifizieren Sie, dass für einen Vektor $v$ aus dem Kern der Matrix $A_\lambda$ gilt: $Av = \lambda v$. (Ein solcher Vektor $v$ heißt *Eigenvektor* der Matrix $A$ zum Eigenwert $\lambda$.)

**Lösung:**

(a) Es ist $\det(A_\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$.

(b) Löst man die quadratische Gleichung $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, so erhält man die Werte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 6$.

(c) Löst man die homogenen linearen Gleichungssysteme $A_1 v = 0$ und $A_6 v = 0$, so erhält man

$$\ker(A_1) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \ker(A_6) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Es gilt $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ 24t \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} t \\ 4t \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.