Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 09/10 4./14. Dez. 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

Aufgabe 24 (Spiegelung in $\mathbb{R}^2$) Der Punkt $\vec{x} = (1,2)^T$ werde an der y-Achse gespiegelt. Als Bild erhalte man $\vec{y}$.

(i) Bestimmen Sie $\vec{y}$ anhand einer Skizze.

(ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A aus den Bildern der Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.

(iii) Überprüfen Sie, ob es sich um eine Spiegelung handelt, d.h. ob gilt $A^2 = E$.

LÖSUNG: (i) Man zeichne die Vektoren $(1,2)^T$ und $(-1,2)^T$ in ein Koordinatensystem...

(ii) Es gilt

$$A\vec{e}_1 = -\vec{e}_1, \quad A\vec{e}_2 = \vec{e}_2.$$

Somit erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Eigenwerte von A sind direkt ablesbar, nämlich -1 und 1. Damit sehen wir, daß $A^2 = E$ gilt, also beschreibt A eine Spiegelung.

Aufgabe 25 (Eigenwerte und Eigenvektoren) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Spur und Determinante dieser Matrix.

(ii) Stellen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ auf, und bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2. Wo finden Sie im Polynom $p(\lambda)$ die Spur und die Determinante der Matrix wieder?

(iii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils die Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenräume $\{\vec{x} : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$.

LÖSUNG: (i) Es gilt $\operatorname{tr}(A) = 2$ und $\det(A) = -8$.

(ii) Es gilt $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also die Eigenwerte, sind $\{-2, 4\}$.

(iii) Es gilt

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Eigenräume

$$E_4=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad E_{-2}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26 (Basisdarstellung von Vektoren und linearen Abbildungen) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basis gegeben

$$\mathcal{B}=\left\{\vec{b}_1=(1,0,1)^T,\ \vec{b}_2=(-1,2,1)^T,\ \vec{b}_3=(-2,-2,2)^T\right\}$$

sowie ein Vektor

$$\vec{x}_1=(1,0,-3)^T$$

(i) Begründen Sie zunächst, dass $\mathcal{B}$ tatsächlich eine Basis darstellt.

(ii) Bestimmen Sie die Darstellung $\vec{y}_1$ des gegebenen Vektors $\vec{x}_1$ bez. der Basis $\mathcal{B}$.

Ferner sei der Vektor $\vec{y}_2$ gegeben durch

$$\vec{y}_2=(1,0,1)^T\quad\text{bez. der Basis }\mathcal{B}.$$

(iii) Bestimmen Sie die Darstellung $\vec{x}_2$ dieses Vektors $\vec{y}_2$ bez. der Standardbasis.

Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}\quad\text{gegeben durch }\vec{x}\mapsto\vec{b}_1\times\vec{x}$$

mit obigem Basisvektor $\vec{b}_1$.

(iv) Begründen Sie, dass diese Abbildung tatsächlich linear ist.

(v) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A dieser Abbildung.

(vi) Stellen Sie schließlich A in der Basis $\mathcal{B}$ dar, d.h. bestimmen Sie $\widetilde{A}=B^{-1}\cdot A\cdot B$ für die Basistransformationsmatrix B.

Lösung: (i) Eine Basis des $\mathbb{R}^3$ besteht aus 3 linear unabhängigen Vektoren. Schreiben wir die Elemente von $\mathcal{B}$ in die Spalten einer Matrix B, so ist $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis, wenn die Matrix B invertierbar ist. Dies testen wir über die Determinante:

$$\det(B)=\det\left(\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&2&-2\\1&1&2\end{pmatrix}\right)=12.$$

Damit ist B invertierbar und $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(ii) Es gilt

$$B^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}3&0&3\\-1&2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Multiplizieren wir von links die Matrix B^{-1} an einen Vektor $\vec{x}$, so ist das Ergebnis $\vec{y}$ genau die Darstellung des Vektors $\vec{x}$ in der Basis $\mathcal{B}$, es gilt also

$$\vec{x}=y_1\vec{b}_1+y_2\vec{b}_2+y_3\vec{b}_3.$$

Damit erhalten wir

$$\vec{y}_1=\mathcal{B}^{-1}\vec{x}_1=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6\\-4\\-4\end{pmatrix}.$$

(iii) Analog, mit B statt B^{-1} erhalten wir

$$\vec{x}_2 = B\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(iv) Das Kreuzprodukt ist bilinear, somit ist die Abbildung, da eine Komponente des Kreuzproduktes fest bleibt, linear. Nachrechnen ist auch nicht schwer, wenn die abstrakte Argumentation nicht einsichtig ist...

(v) Wir finden die Abbildungsmatrix durch die Bilder der Einheitsvektoren unter der linearen Abbildung:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(vi) Mit unserer Notation gilt

$$\tilde{A} = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

Abgabe am 18. Dezember 2009, bzw. am 11. Januar 2010 in den Übungen.

Aufgabe H19 (4 Punkte) *Eigenwerte und Eigenvektoren* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stellen Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ auf, und bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils die zugehörigen Eigenräume.

LÖSUNG: (i) Es gilt

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Somit sind die Eigenwerte von A genau -2 und 2.

(ii) Die Eigenräume sind

$$E_{-2} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$E_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H20 (4 Punkte) *Spiegelung in* $\mathbb{R}^2$

(i) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A zur Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $g : 2x + y = 0$. Fertigen Sie dazu eine Skizze an. Ist A orthogonal? Ermitteln sie $\det(A)$.

(ii) Bestimmen Sie das Spiegelbild $\widetilde{\triangle}$ des Dreiecks $\triangle$ mit den Eckpunkten $P = (1, 0)^T$, $Q = (0, 1)^T$ und $R = (1, 1)^T$. Wie lauten die Bilder dieser Eckpunkte? Fertigen Sie auch hier eine Skizze an.

LÖSUNG: (i) Der Normalenvektor der Geraden wird gespiegelt, der Richtungsvektor der Geraden wird fix gelassen. Wir erhalten also

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ können wir auch via Linearität der Matrixmultiplikation von Hand die Abbildungsmatrix ermitteln:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{5} \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right],$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{5} \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right].$$

Wir erhalten dadurch sofort

$$A\vec{e}_1 = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A\vec{e}_2 = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A \cdot A^T = E$, also ist A orthogonal. Aus der Konstruktion ist klar, daß $\det(A) = -1$ gilt, denn wir spiegeln einen Vektor und halten den anderen fix, haben also die zwei Eigenwerte -1 und 1.

(ii) Das Bild des Dreiecks ist das Dreieck mit Eckpunkten $\left\{ -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}, -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe H21 (4 Punkte) *Drehungen in* $\mathbb{R}^3$ *und Basiswechsel* Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (bez. der Standardbasis) der Drehung des $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ um die Drehachse $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Ergänzen Sie $\vec{v}_1$ zu einer Basis $\mathcal{B} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ aus orthogonalen Einheitsvektoren.

(ii) Wie lautet die Abbildungsmatrix $\widetilde{A}$ der Drehung bez. dieser Basis $\mathcal{B}$?

(iii) Zeigen Sie, dass $\widetilde{A}$ eine orthogonale Matrix ist.

(iv) Wie berechnet sich nun A aus $\widetilde{A}$ und der Basistransformationsmatrix B, welche $\mathcal{B}$ in die Standardbasis übersetzt? Berechnen Sie A exakt oder näherungsweise.

LÖSUNG: (i) Dieser Teil ist nicht eindeutig, da es beliebig viele ergänzte Basen gibt. Eine Möglichkeit ist

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}.$$

Wichtig ist für jede ONB, daß die Basiselemente Norm 1 haben, paarweise orthogonal aufeinander stehen und ein Rechtssystem bilden. Letzteres erreichen wir immer dadurch, daß wir den dritten Basisvektor als das Kreuzprodukt der beiden ersten Basisvektoren bestimmen. Ein Kriterium, nachzuprüfen, ob wir ein Rechtssystem haben, ist, die Basisvektoren in eine Matrix B zu schreiben und deren Determinante zu bestimmen. Ist $\det(B) = 1$, so haben wir ein Rechtssystem, ist $\det(B) = -1$, dann haben wir keins.

(ii) In dieser Basis ist der erste Vektor ein Fixpunkt, die beiden anderen Vektoren werden um $-\frac{\pi}{6}$ gedreht. Wir erhalten also

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

(iii) Offensichtlich gilt $\widetilde{A}^T\widetilde{A} = E_3$.

(iv) Die Transformationsmatrix erhalten wir aus $\mathcal{B}$ via

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist orthogonal, da die Spalten eine ONB bilden. Somit erhalten wir die Inverse leicht:

$$B^{-1} = B^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -2\end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Matrix ist die durch diese Basistransformation konjugierte Matrix:

$$A = B\widetilde{A}B^{-1}.$$

An dieser Stelle können wir zufrieden sein, die Zahlen interessieren nur mäßig, es geht uns ja darum, das Prinzip des Bildens von Abbildungsmatrizen zu verstehen. Dennoch sieht die Matrix nummerisch gerundet ungefähr so aus:

$$A \approx \begin{pmatrix} 0.9107 & 0.3333 & -0.2440 \\ -0.2440 & 0.9107 & 0.3333 \\ 0.3333 & -0.2440 & 0.9107 \end{pmatrix}.$$

Exakt sollte A so aussehen:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^T.$$

Aufgabe H22 (4 Zusatzpunkte) *Lineare Abbildungen und Basiswechsel* Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\varphi((1,3)^T) = 4 \cdot (1,3)^T, \quad \varphi((1,1)^T) = -(1,1)^T. \qquad (*)$$

(i) Bestimmen Sie (*ohne* explizite Rechnung!) eine Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, bez. welcher sich die Abbildungsmatrix C dieser Abbildung in Diagonalgestalt schreiben lässt.

(ii) Bestimmen Sie nun die Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung bez. der Standardbasis.

(iii) Berechnen Sie nun $\varphi(2,0)$, und zwar

(a) indem Sie zunächst $(2,0)^T = (1,3)^T - (1,1)^T$ benutzen und anschließend $\varphi(2,0)$ aus $(*)$ sowie der Linearität von φ ermitteln;

(b) indem Sie zweitens Ihr Resultat aus Aufgabenteil (ii) verwenden und $\varphi(2,0)$ direkt aus einer Matrizenmultiplikation gewinnen.

LÖSUNG: (i) Eine Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ erhalten wir durch die Wahl $\vec{b}_1 = (1,3)^T$ und $\vec{b}_2 = (1,1)^T$, denn

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Determinante -2, also bilden die Spalten von B eine Basis. In dieser Basis gilt

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Mit B haben wir bereits die Transformationsmatrix. Deren Inverse erhalten wir durch

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$A = BCB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}.$$

(iii) Wir bekommen einerseits

$$A(2,0)^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -15 & 13 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Andererseits erhalten wir

$$\varphi((2,0)^T) = 3\varphi((1,1)^T) - \varphi((1,3)^T) = -3(1,1)^T - (4,12)^T = \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \end{pmatrix}.$$