Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 27./30. Nov. 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

6. Übung mit Lösungshinweisen

Wiederholungsaufgaben

(W8) *Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen*

(i) Skizzieren Sie die Funktionengraphen von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ für $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

(ii) Auf welchen Teilintervallen existieren die Umkehrfunktionen $\arcsin x$, $\arccos x$ usw?

(iii) Skizzieren Sie jeweils den Funktionengraphen dieser Umkehrfunktionen.

Gruppenübungen

Aufgabe 19 (Inverse von 2×2 Matrizen) Gegeben sei die allgemeine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $\det A = ad - bc \neq 0$.

(i) Verifizieren Sie

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(ii) Was passiert im Fall $ad = bc$?

(iii) Ermitteln Sie speziell, ob folgende Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie ggf. die Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG: (i) Wir rechnen

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist also die behauptete Matrix tatsächlich die Inverse.

(ii) Ist $ad - bc = \det(A) = 0$, dann ist A nicht invertierbar.

(iii)

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \det(A) = 17 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\
B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \det(B) = -2 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\
C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \det(C) = 0 \Leftrightarrow A^{-1} \text{ existiert nicht.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 20 (Inverse von 3×3 Matrizen) Bestimmen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie in diesem Fall die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir fangen mal an, die Inverse von A auszurechnen:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -4 & -9 & 4 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 19 & -8 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

In der rechten unteren Ecke steht nun die Inverse von A.
Wieder fangen wir an, die Inverse von B auszurechnen:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\hline
2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & \dots & & & \dots & \\
\hline
2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

Hier führt der Ansatz auf eine Widersprüchliche Gleichung. Damit ist B nicht invertierbar. Alternativ hätten wir auch die Determinante von B ausrechnen können, $\det(B) = 0$ hätte ebenfalls ergeben, daß B nicht invertiert werden kann.

Aufgabe 21 (Drehungen in der Ebene $\mathbb{R}^2$)

(i) Wie wurde in der Vorlesung eine Drehmatrix $D(\varphi) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert?

(ii) Bestimmen Sie das Bild $D(\varphi) \cdot \vec{x}$ des Vektors $\vec{x} = (-1, 2)^T$ nach Drehung um die Drehwinkel $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

(iii) Bestimmen Sie – *ohne* explizite Rechnung – die Abbildungsmatrix $M(\varphi)$ der Umkehrabbildung einer Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ. Verdeutlichen Sie sich insbesondere die Identität

$$M(\varphi) = D(\varphi)^{-1}.$$

Lösung: (i) Es gilt nach Skript

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{array}{rclrcl} D(0) & = & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & D(0)\vec{x} & = & \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\\ D(\frac{\pi}{2}) & = & \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, & D(\frac{\pi}{2})\vec{x} & = & \begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}\\ D(\pi) & = & \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, & D(\pi)\vec{x} & = & \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}\\ D(\frac{3\pi}{2}) & = & \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, & D(\frac{3\pi}{2})\vec{x} & = & \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\\ D(2\pi) & = & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & D(2\pi)\vec{x} & = & \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} \end{array}$$

(iii) Da $D(\varphi)$ gegen den Uhrzeigersinn dreht, dreht $M(\varphi)$ im Urzeigersinn. Damit dreht $M(\varphi)$ gegen den Uhrzeigersinn um $-\varphi$, also

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi)\\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & +\sin(\varphi)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}.$$

Weiter ist geometrisch klar, daß $M(\varphi)$ die Inverse zu $D(\varphi)$ ist, also

$$M(\varphi) = D(\varphi)^{-1}.$$

Aufgabe 22 (Orthogonale Projektion auf eine Gerade) Gegeben sei die Gerade $g : \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$.

(i) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix P der orthogonalen Projektion auf g, sowie deren Rang.

(ii) Bestimmen Sie den Abstand $d(\vec{x}, g)$ des Punktes $\vec{x} = (-10, -1, 3)^T$ zur Geraden g.

LÖSUNG: Wir nennen den Richtungsvektor der Geraden $\vec{v}$.

(i) Nach Skript errechnet sich die Projektionsmatrix

$$P = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\vec{v}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Wir sehen, die Spalten von P sind alle Vielfache der ersten Spalte. Somit ist der Rang von P gleich 1.

(ii) Es gilt $d(\vec{x}, g) = \|A\vec{x} - \vec{x}\| = \sqrt{98}$.

Aufgabe 23 (Zusammengesetzte lineare Abbildungen) Wir betrachten die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ in z-Richtung auf die x-y-Ebene projeziert und anschließend um die z-Achse um 90° dreht.

(i) Finden Sie die Abbildungsmatrix C für diese lineare Abbildung T.

(ii) Finden Sie die Abbildungsmatrizen A für die orthogonale Projektion auf die x-y-Ebene und B für die Drehung um 90° um die z-Achse.

(iii) Berechnen Sie AB und BA.

(iv) Wir erwarten $C = BA$, erklären Sie geometrisch, warum auch $C = AB$ gilt.

(v) Gilt immer $BA = AB$ für Abbildungsmatrizen, die eine zusammengesetzte lineare Abbildung beschreiben?

LÖSUNG: (i) Durch Abbilden der Basisvektoren oder geometrische Überlegung finden wir

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) $BA = C = AB$.

(iv) Es führt auf das gleiche Ergebnis, erst zu Drehen und dann zu projezieren oder erst zu projezieren und dann zu drehen. Dies liegt daran, daß die Projektion entlang der Drehachse verläuft und auf der Drehebene identisch wirkt. Dies ist jedoch keinesfalls der Normalfall!

(v) Betrachten wir im $\mathbb{R}^2$ eine Drehung um 90° um den Ursprung und die Projektion auf die x-Achse, so komuutieren diese beiden Abbildungsmatrizen nicht:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

Hausübungen

Abgabe am 4. Dezember bzw. am 7. Dezember in den Übungen.

Aufgabe H16 (4 Punkte) *Berechnung inverser Matrizen und lineare Gleichungssysteme*

(i) Bestimmen Sie – falls möglich – die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Lösen Sie nun unter Verwendung Ihrer Resultate die linearen Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: (i) Mit Gaußalgorithmus finden wir

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Lösungen der Gleichungssysteme erhalten wir via

$$\vec{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = B^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H17 (4 Punkte) *Drehungen in* $\mathbb{R}^3$

(i) Zeigen Sie, daß

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix ist.

(ii) Bestimmen Sie den Drehwinkel φ.

(iii) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{v}$, welcher die Drehachse erzeugt, mit $v_3 = 3 + 2\sqrt{2}$.

LÖSUNG: (i) Die Abbildung ist orthogonal, da $A^T \cdot A = \mathbb{1}$. Da $\det(A) = 1$ ist die Abbildung eine Drehung.

(ii) Aus $\operatorname{tr}(A) = -\frac{1}{2}$ folgt mit der Formel im Skript $\varphi = \arccos(-\frac{3}{4}) \approx 138,6°$.

(iii) Wir stellen das Gleichungssystem für den Vektor $\vec{v}$ auf:

v_1	v_2	v_3	
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$-\frac{1}{2}$	$-(1+\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{2}$	0
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)$	0
...	...	...	...
3	$-\sqrt{2}$	1	0
0	$3+2\sqrt{2}$	1	0
0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-2+\frac{3}{\sqrt{2}}$	0

wählen wir

$$v_3 = 3 + 2\sqrt{2},$$

so folgt

$$v_2 = -1 \quad \text{und} \quad v_1 = -1 - \sqrt{2}.$$

Dies ist die Drehachse der Drehung.

Aufgabe H18 (4 Punkte) *Orthogonale Projektion auf eine Ebene* Gegeben sei die Ebene $E : \lambda(1, 0, -1)^T + \mu(1, -2, 1)^T$ in Parameterform.

(i) Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene.

(ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der orthogonalen Projektion P auf E, sowie deren Rang.

(iii) Berechnen Sie den Abstand $d(\vec{x}, E)$ des Punktes $\vec{x} = (2, -2, 3)^T$ zur Ebene E.

LÖSUNG: (i) Mittels Kreuzprodukt erhalten wir

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir normieren den Normalenvektor und erhalten

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir die orthogonale Projektion mittels Formel im Skript:

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da das Bild von P zweidimensional, nämlich die Ebene E ist, ist der Rang 2.

(iii) Wir wissen, der Abstand ist genau die Länge von $P(\vec{x}) - \vec{x}$. Wir erhalten

$$d = \|P(\vec{x}) - \vec{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{3}.$$