Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 20. November 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

5. Übung mit Lösungshinweisen

Wiederholungsaufgaben

Die Logarithmusfunktion

Für reelles $a > 0$, $a \neq 1$, ist der *Logarithmus* $\log_a$ *zur Basis* a definiert als

$$\log_a x = y \quad \text{genau dann, wenn } a^y = x \quad \text{für } x > 0.$$

Der Logarithmus zur Basis $e = 2.71\ldots$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wird mit ln bezeichnet.
Der Logarithmus zur Basis $a = 10$ heißt *dekadischer Logarithmus.*

(W5) Berechnen Sie den Wert von x aus folgenden Gleichungen:

(i) $\log_{\frac{1}{2}} 256 = x^3$ (ii) $\log_x 2 = -\frac{2}{3}$

(W6) Skizzieren Sie die Funktionen

(i) $\ln x$ für $x > 0$ (ii) $\ln |x|$ für $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$

(W7) Zeigen Sie

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

und daraus folgend

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\,; \quad \text{insbesondere gilt also für } b = e:\ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\,.$$

Gruppenübungen

Aufgabe 16 (Determinanten) Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

LÖSUNG: Es gilt:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} &= -1\\ \det\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix} &= 0\\ \det\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix} &= -7.\end{aligned}$$

Aufgabe 17 (Struktur Linearer Gleichungssysteme) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7\\ 1 & 3 & 4 & 3 & 10\\ 1 & 3 & 2 & 3 & 10\end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Rang und Kern von A. Verifizieren Sie hieran die Identität

$$\dim \operatorname{kern}(A) + \operatorname{rang}(A) = 5.$$

(ii) Betrachten Sie nun das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } \vec{b} = (0, 2, 4, 4)^T\,.$$

Verifizieren Sie, daß $\vec{x}_s = (1, 1, 0, 0, 0)^T$ eine spezielle Lösung dieses inhomogenen Systems darstellt. Wie erhalten Sie mit ihr die vollständige Lösungsmenge des Systems?

LÖSUNG: (i) Mit Gaußalgorithmus formen wir das LGS um auf die Form

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_5 & x_4 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.\end{array}$$

An dieser Stelle merken wir an, das diese Form nicht eindeutig ist. Was allerdings eindeutig ist, ist der Rang der Matrix. Diesen lesen wir ab: Es gibt 3 Pivotelemente, die nicht verschwinden, also ist $\operatorname{rang}(A) = 3$.
Wir können 2 Variablen frei wählen, wir wählen $\lambda := x_5$ und $2 \cdot \mu := x_4$. Damit erhalten wir den Lösungsraum

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}11\\3\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir erkennen, der Kern ist zweidimensional, also $\dim(\ker(A)) = 2$. Damit stimmt in diesem Beispiel die Rangformel

$$\operatorname{rang}(A) + \dim(\ker(A)) = \dim(V) = 5,$$

wobei in unserem Beispiel $V = \mathbb{R}^5$ gilt.

(ii) Nachrechnen, daß der Vektor eine spezielle Lösung ist, ist leicht. Falls nicht, ist auch der restliche Text unverständlich. Somit sparen wir uns das.
Hier ist nun nichts mehr zu tun. Wir kennen den Kern und wir kennen eine spezielle Lösung, damit kennen wir alle Lösungen, nämlich

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 18 (Vertauschbarkeit in Matrixprodukten) Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

finde man eine (3×2)-Matrix B, so daß gilt $AB = E$. Berechnen Sie schließlich das Produkt BA und vergleichen Sie. Warum gilt $(BA)^2 = (BA)$?

LÖSUNG: Wir setzen

$$B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

und setzen dieses B in die Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + 2c + 3e & b + 2d + 3f \\ 6c + e & 6d + f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus lesen wir folgendes Lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 6 Variablen ab:

a	b	c	d	e	f	
1	0	2	0	3	0	1
0	1	0	2	0	3	0
0	0	6	0	1	0	0
0	0	0	6	0	1	1.

Dieses LGS ist schon in einer schönen Form, Gaußalgorithmus ist nicht mehr notwendig. Da dieses LGS unterbestimmt ist, können wir e und f frei wählen, aus Faulheit wählen wir $e = f = 0$. Damit erhalten wir das LGS

a	b	c	d	
1	0	2	0	1
0	1	0	2	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	$\frac{1}{6}$.

Wir erhalten durch Ablesen und leichtes Auflösen von unten nach oben

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{6} \\ c &= 0 \\ b &= -\frac{1}{3} \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung für das Problem.
Das Produkt (BA) ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation erhalten wir für beliebige Matrizen A, B mit $A \cdot B = E$ die Identität

$$(BA)^2 = BABA = B(AB)A = BEA = BA.$$

Dies ist kein Zufall, sondern algebraisch vorgegeben. Solche Matrizen heißen auch idempotent.

Hausübungen

Aufgabe H13 (4 Punkte) *Berechnung von Determinanten*
Sei $t \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\1&2&2&\ln(\ln(\ln(\sqrt{2})))&2\\1&2&3&3&42^{42}\\1&2&3&4&4\\1&2&e^e&4&5\end{pmatrix}.$$

LÖSUNG: Für 2×2 und 3×3 Matrizen nutzen wir die Formeln aus dem Skript zur Berechnung der Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix} = \cos(t)^2 + \sin^2(t) = 1,$$

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix} = 6+2+2-4-3-2 = 1.$$

Bei der 5×5 Matrix sehen wir, da die zweite Spalte das Doppelte der ersten Spalte ist. Für die Berechnung der Determinante der dritten Matrix nutzen wir die Bemerkung aus dem Skript. Addieren wir das $-\frac{1}{2}$-fache der zweiten Spalte zur ersten Spalte, erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix}0&2&1&1&1\\0&2&2&\ln(\ln(\ln(\sqrt{2})))&2\\0&2&3&3&42^{42}\\0&2&3&4&4\\0&2&e^e&4&5\end{pmatrix}.$$

Nach der Bemerkung im Skript, hat diese Matrix sowohl die gleiche Determinante, wie die Ausgangsmatrix, als auch Determinante 0, da die erste Spalte nur aus Nullen besteht. Somit folgern wir sofort

$$\det\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\1&2&2&\ln(\ln(\ln(\sqrt{2})))&2\\1&2&3&3&42^{42}\\1&2&3&4&4\\1&2&e^e&4&5\end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe H14 (4 Punkte) *Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme und Determinanten*
Gegeben seien die Daten

$$A = \begin{pmatrix}2&4&8\\-1&1&-1\\\alpha&\alpha^2&\alpha^3\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}12\\0\\12\end{pmatrix}$$

mit einem reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Entscheiden Sie unter Berechnung der Determinante $\det(A)$, für welche Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar ist.
Es ist dabei nicht nötig, die Lösungen explizit auszurechnen.

(ii) Betrachten wir für $\alpha = 2$ ein spezielleres Problem $A\vec{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, es sind also nur Lösungen des allgemeinen LGS interessant mit $y_1 = 0$.
Begründen Sie, daß dieses spezielle LGS eindeutig lösbar ist, obwohl $\det(A) = 0$ ist. *Es ist dabei wieder nicht nötig, die Lösungen explizit auszurechnen. Es ist aber natürlich auch nicht falsch, das LGS zu lösen.*

LÖSUNG: (i) Mit Hilfe der Regel von Sarrus erhalten wir $\det(A) = 6\alpha^3 - 6\alpha^2 - 12\alpha = 6\alpha(\alpha + 1)(\alpha - 2)$. Somit ist für alle $\alpha \notin \{-1, 0, 2\}$ das LGS eindeutig lösbar.

(ii) Für $\alpha = 2$ ist die erste Zeile identisch mit der dritten Zeile. Somit haben wir im allgemeinen LGS mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten, in welchem wir mindestens eine Variable frei wählen können, sofern das LGS lösbar ist. Wir probieren und wählen $x_1 = 0$, somit erhalten wir unser spezielles LGS. Dieses reduziert sich auf das Problem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Determinante 12, also ist dieses LGS eindeutig lösbar mit Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Wir wählen $y_2 = x_2$ und $y_3 = x_3$. Damit ist dieses LGS also eindeutig lösbar.
Natürlich kann mans auch aus-X-en, das mach ich aber nicht!

Aufgabe H15 (4 Punkte) *Vertauschbarkeit in Matrixprodukten*
Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

finde man die Menge aller (2×2)-Matrizen B, so dass gilt $AB = BA$.
Hinweis: *Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem* $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *in den unbekannten Elementen von* B.

LÖSUNG: Wir betrachten eine allgemeine 2×2 Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und bringen die die gewünschte Gleichheit in die Form einer linearen Gleichung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2b & -2b \\ 2a + 2c - 2d & 2b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten die 4 linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} -2b &= 0 \\ -2b &= 0 \\ 2a + 2c - 2d &= 0 \\ 2b &= 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $b = 0$ und $d = a + c$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ frei wählbar sind. Die Menge aller mit A kommutierenden Matrizen ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a + c \end{pmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R} \right\}.$$