Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 13./16. November 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

4. Übung mit Lösungshinweisen

Wiederholungsaufgabe

(W4) *Potenz- und Wurzelfunktionen*

(i) Skizzieren Sie die Funktionengraphen der Potenzfunktionen

$$f(x) = x^p \quad \text{für } p = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$$

(ii) Vervollständigen Sie:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[\cdots]{a^{\cdots}} \qquad \text{für } a \geq 0,\ m, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0;$$

$$\frac{1}{a^p} = a^{\cdots} \qquad \text{für } a > 0,\ p > 0 \text{ bzw. } a \neq 0,\ p \in \mathbb{N};$$

$$a^p \cdot a^q = a^{\cdots},\ (a^p)^q = a^{\cdots},\ a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^{\cdots} \qquad \text{für } a, b > 0,\ p, q \in \mathbb{R}.$$

(iii) Vereinfachen Sie, so weit möglich, folgende Ausdrücke ($a, b > 0$).

(a) $\dfrac{\sqrt[2]{ab^5}}{\sqrt[4]{(2a)^2 b^6}}$ (b) $\dfrac{(3a)^2 b^3}{\sqrt{a b^2}}$ (c) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^6 b^3} + \sqrt{b^3}\right)^2}{b}$

Lösung: (i) Siehe Scan.

(ii)

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{für } a \geq 0,\ m, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0;$$

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p} \qquad \text{für } a > 0,\ p > 0 \text{ bzw. } a \neq 0,\ p \in \mathbb{N};$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q},\ (a^p)^q = a^{p \cdot q},\ a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p \qquad \text{für } a, b > 0,\ p, q \in \mathbb{R}.$$

(iii) (a) $\frac{b}{\sqrt{2}}$

(b) $9a\sqrt{a} \cdot b$

(c) $a^4 \cdot b + 2a^2 b \cdot \sqrt{b} + b^2$

Aufgabe 12 (Matrixmultiplikation) Berechnen Sie, insofern möglich, alle möglichen Produkte $A \cdot B$, $C \cdot C$ usw. zwischen folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 39 \\ A \cdot C &= \begin{pmatrix} 0 & 8 & 30 \end{pmatrix} \\ A \cdot D &= \begin{pmatrix} 2 & 10 & 27 & 3 \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ -1 & -3 & -5 \\ 8 & 24 & 40 \end{pmatrix} \\ C \cdot B &= \begin{pmatrix} 14 \\ 61 \\ 7 \end{pmatrix} \\ C \cdot C &= \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ -4 & 9 & 15 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \\ C \cdot D &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 9 \\ -7 & 16 & 42 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Produkte

$$A \cdot A, B \cdot B, B \cdot C, B \cdot D, C \cdot A, D \cdot A, D \cdot B, D \cdot C, D \cdot D$$

existieren nicht.

Aufgabe 13 (Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme) Lösen Sie folgende zwei Gleichungssysteme:

(i) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$ (ii) $3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2.$

Interpretieren Sie Ihre Resultate geometrisch.

LÖSUNG: (i) Wir wählen $\lambda := x_3$ und $\mu := x_2$ beliebig. Dann gilt

$$x_3 = 2 - 3\mu + 2\lambda.$$

Wir erhalten als Lösungsmenge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ist zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 9x_2 + -6x_3 &= -6 \end{aligned}$$

äquivalent. Wir wählen $\lambda = x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig, und addieren beide Gleichungen:

$$10x_2 - 10\lambda = -6.$$

Wir erhalten durch auflösen und einsetzen

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda \\ x_2 &= \lambda - \frac{3}{5} \\ x_1 &= \lambda + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Aufgabe 14 (Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus I) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihre Ergebnis geometrisch.

LÖSUNG: Mit Gaußalgorithmus erhalten wir die eindeutige Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge $\{\vec{x}\}$ besteht also aus einem Punkt.

Aufgabe 15 (Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus II) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

LÖSUNG: Nach Gaußalgorithmus erhalten wir das System

x_1	x_2	x_3	
1	2	1	1
0	1	1	1

Wählen wir $\lambda := x_3$ beliebig, so folgt $x_2 = 1 - \lambda$ und $x_1 = \lambda - 1$. Wir erhalten die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diese Menge ist eine Gerade, die Schnittgerade der beiden Ebenen, welche durch die linearen Gleichungen repräsentiert werden.

Hausübungen

Abgabe am 20. November bzw. am 23 November in den Übungen.

Aufgabe H10 (4 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

LÖSUNG: Wir multiplizieren beide Seiten mit 3 und erhalten das LGS

x_1	x_2	x_3		
2	4	-4	2	
-1	-2	2	-1	
1	2	-2	1	
1	2	-2	1	1. Zeile mal $\frac{1}{2}$
1	2	-2	1	2. Zeile mal -1
1	2	-2	1	
1	2	-2	1	
		0	0	2. Zeile $-$ 1. Zeile
		0	0	3. Zeile $-$ 1. Zeile.

Somit ist das Gleichungssystem zweifach unterbestimmt und wir können $x_3 = \lambda$ und $x_2 = \mu$ frei wählen. Damit erhalten wir die Lösungsmenge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese Menge beschreibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Da jede Gleichung im Gleichungssystem die gleiche Ebene beschreibt, ist der Schnitt der Ebenen wieder eine Ebene.

Aufgabe H11 (4 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Resultat geometrisch.

LÖSUNG:

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	−1	1	0	1
1	0	−1	1	1
1	−1	0	1	1
1	−2	2	0	1
1	−1	1	0	1
0	1	−2	1	0
0	0	−1	1	0
0	−1	1	0	0
1	−1	1	0	1
0	1	−2	1	0
0	0	1	−1	0
0	−1	−1	1	0
1	−1	1	0	1
0	1	−2	1	0
0	0	1	−1	0
0	0	0	0	0

Wir lösen nun rückwärts auf:

$$\begin{aligned} x_4 &:= \lambda \\ x_3 &= \lambda \\ x_2 &= 2x_3 - x_4 = \lambda \\ x_1 &= 1 + \lambda - \lambda = 0. \end{aligned}$$

Lösungsmenge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diese Menge beschreibt eine Gerade im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe H12 (4 Punkte)

(i) Bestimmen Sie alle Lösungsvektoren $\vec{x}$ des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -(1+\alpha) & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie im Falle der Lösbarkeit die gesamte Lösungsmenge in vektorieller Form an.

(ii) Welchen Rang hat die Matrix A in Abhängigkeit von α?

LÖSUNG: (i) Wir lösen das LGS

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	0	-1	1	0	
0	1	0	-1	2	
2	0	$-(1+\alpha)$	2	0	
1	0	-1	1	0	
0	1	0	-1	2	
0	0	$1-\alpha$	0	0	3. Zeile $(-2)\cdot$ 1. Zeile

- Erster Fall: Ist $\alpha = 1$, so reduziert sich die 3. Gleichung auf $0 = 0$. In diesem Fall können wir $\lambda := x_4$ und $\mu := x_3$ frei wählen. Wir erhalten den Lösungsraum

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Der Lösungsraum ist in diesem Fall eine Ebene im $\mathbb{R}^4$.

- Zweiter Fall: Ist $\alpha \neq 1$, so ist $\lambda := x_4$ frei wählbar und wir erhalten aus der 3. Gleichung $x_3 = 0$. Die Lösungsmenge ist nun die Gerade

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Im Fall $\alpha = 1$ ist der Rang der Matrix 2 und im Fall $\alpha \neq 1$ ist der Rang der Matrix 3.