Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 2. November 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

3. Übung mit Lösungshinweisen

Wiederholungsaufgaben

(W3) *Winkelfunktionen*

(i) Skizzieren Sie den Einheitskreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(ii) Erläutern Sie anhand Ihrer Skizze den Zusammenhang zwischen Gradmaß und Bogenmaß eines in den Einheitskreis eingezeichneten Winkels α.

(iii) Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze den Sinus, den Kosinus und den Tangens eines Winkels.

(iv) Begründen Sie anhand Ihrer Skizze die Identität

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(v) Skizzieren Sie schließlich die Funktionen sin, cos und tan in ein Koordinatensystem. Welche Perioden für diese drei Funktionen können Sie Ihrer Skizze entnehmen?

LÖSUNG: Siehe Scan.

Gruppenübungen

Aufgabe 8 (Geraden im Raum) Liegen die Punkte $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}?$$

LÖSUNG: Liegt P auf der Geraden, so ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

lösbar. Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda \cdot 1 \\ 0 &= \lambda \cdot 0 \\ 6 &= \lambda \cdot 3. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist das Gleichungssystem für $\lambda = 2$ eindeutig lösbar, also liegt der Punkt P auf der Geraden.
Liegt Q auf der Geraden, so ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

lösbar. Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \cdot 1 \\ -1 &= \lambda \cdot 0 \\ 2 &= \lambda \cdot 3. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht lösbar, da $-1 = 0$ eine nicht erfüllbare Gleichung in $\mathbb{R}$ ist. Somit liegt der Punkt Q nicht auf der Geraden.

Aufgabe 9 (Geraden in der Ebene) Gegeben seien die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g_2 : x_1 + 2x_2 = 1$$

(i) Fertigen Sie eine Skizze an, und kennzeichnen Sie hierin die im folgenden gefragten geometrischen Größen.

(ii) Bestimmen Sie jeweils einen Einheitsnormalenvektor an die Geraden, und ermitteln Sie damit die Hesseschen Normalformen. Interpretieren Sie die eingehenden Größen geometrisch.

(iii) Wie lautet der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden?

(iv) Berechnen Sie schließlich den Winkel, unter welchem sich die Geraden schneiden.

LÖSUNG: (i) Siehe Scan.

(ii) Ein Normalenvektor löst die Gleichung

$$\left\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow n_1 + n_2 = 0.$$

Somit ist $\vec{n_0} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor und

$$\vec{n} := \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsnormalenvektor. Wir erhalten die Hessesche Normalenform

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Die Zahl $\left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right|$ gibt dabei den Abstand der Geraden zum Koordinatenursprung an, das Vorzeichen bekämen wir weg, wenn wir mit der Einheitsnormalen $-\vec{n}$ gerechnet hätten...

Wir lesen den Normalenvektor $\vec{n_0} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ab und erhalten den Einheitsnormalenvektor

$$\vec{n} := \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die Hessesche Normalenform

$$\frac{\sqrt{5}}{5} x_1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Die Zahl $\frac{\sqrt{5}}{5}$ gibt wieder den Abstand der Geraden zum Koordinatenursprung an.

(iii) Ein Punkt ist genau dann Schnittpunkt der Geraden, wenn er das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

löst. Dieses bringen wir auf die Form eines linearen Gleichungssystems mit 2 Variablen und erhalten:

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu &= 1 \\ \lambda - \mu &= -1. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $\lambda = -\frac{1}{3}$ und $\mu = \frac{2}{3}$. Einsetzen in die Geradengleichungen liefert

$$\begin{aligned} P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Gleichheit $P_1 = P_2$ bestätigt unsere Rechnungen und liefert den gemeinsamen Schnittpunkt.

(iv) Der Winkel zwischen den beiden Geraden ist durch den Winkel der Richtungsvektoren gegeben. Dieser ist nicht eindeutig, durch die Forderung $0° \leq \phi < 90°$ ist er jedoch eindeutig. Wir setzen in die Formel ein

$$\left|\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle\right| = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\| \cdot |\cos(\varphi)|$$

und erhalten

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Dies ergibt ungefähr einen Winkel von $\varphi \approx 71.6°$.

Aufgabe 10 (Abstand von Punkt und Ebene) Bestimmen Sie den jeweiligen Abstand des Punktes P von der Ebene E.

(i) $P = \begin{pmatrix}3\\6\\8\end{pmatrix}, \quad E : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$

(ii) $P = \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}, \quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

LÖSUNG: (i) Aus der Gleichung lesen wir die Normale

$$\vec{n_0} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

ab. Dieser Vektor hat Norm $\sqrt{14}$, also ist eine Einheitsnormale gegeben durch

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{14}}{14} \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Die Hessesche Normalform lautet daher

$$\frac{2}{\sqrt{14}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{14}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{14}}x_3 = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Der Abstand des Punktes P zur Ebene E errechnet sich daher nach Formel

$$\left|\left\langle \vec{n}, \vec{P} \right\rangle - \frac{4}{\sqrt{14}}\right| = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}.$$

(ii) Wir ermitteln einen Vektor, der senkrecht auf beiden Spannvektoren der Ebene steht. Ein solcher Vektor ist das Ergebnis des Vektorprodukts beider Spannvektoren. Somit ist ein Normalenvektor durch

$$\vec{n_0} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$$

gegeben. Dieser Vektor hat Norm $3\sqrt{2}$, also ist eine Einheitsnormale gegeben durch

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Die Hessesche Normalform lautet daher

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + 0x_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Der Abstand des Punktes P zur Ebene E errechnet sich daher nach Formel

$$\left|\left\langle \vec{n}, \vec{P} \right\rangle - \frac{3}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}|2-3-3| = 2\sqrt{2}.$$

Aufgabe 11 (Abstand von Gerade und Ebene) Gegeben sei die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

und die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit des jeweiligen Parameters s bzw. t den Abstand der Punkte der Geraden zur Ebene. Für welchen Parameter s_0 bzw. t_0 wird dieser Abstand minimal? Deuten Sie die Ergebnisse Ihrer Rechnungen geometrisch.

LÖSUNG: Wir bestimmen zuerst die implizite Form der Ebene. Dazu ermitteln wir einen Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$. Dieser muß senkrecht auf den Richtungsvektoren der Ebene stehen, also

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Dies wird z. B. durch das Vektorprodukt beider Spannvektoren gelöst:

$$\vec{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter folgt $\|\vec{n_0}\| = \sqrt{3}$. Somit ist

$$\vec{n} := \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsnormalenvektor. Die Ebene hat somit die Gestalt

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_3 = \sqrt{3}.$$

Es bezeichne

$$g_1(s) := \begin{pmatrix} 4+s \\ 1 \\ -2+s \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten für den Abstand

$$\begin{aligned} d(g_1(s),E) &= \left|\sqrt{3} - \langle g_1(s), \vec{n}\rangle\right| \\ &= \left|\sqrt{3} - \left\langle \begin{pmatrix} 4+s \\ 1 \\ -2+s \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right| \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}|1-s|. \end{aligned}$$

Es bezeichne

$$g_2(t) := \begin{pmatrix} 1+t \\ 3 \\ 3-t \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten für den Abstand

$$\begin{aligned} d(g_2(t),E) &= \left|\sqrt{3} - \langle g_2(t), \vec{n}\rangle\right| \\ &= \left|\sqrt{3} - \left\langle \begin{pmatrix} 1+t \\ 3 \\ 3-t \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right| \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Der Punkt minimalen Abstands von g_1 zu E ist die Nullstelle der Funktion $d(g_1(s),E)$, also $g_1(1) = (5,1,-1)^T$. Dies ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.
Da die Funktion $d_2(g(t),E)$ konstant ist, ist g_2 parallel zur Ebene. Dies sieht man auch algebraisch ein, da der Richtungsvektor von g_2 linear abhngig zu den Spannvektoren der Ebene E ist.

Hausübungen

Aufgabe H7 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform, die durch die von

$$P = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

bestimmten Punkte geht. Bestimmen Sie ferner einen Einheitsnormalenvektor, und ermitteln Sie hieraus die Hessesche Normalform der Ebene. Welchen Abstand hat die Ebene vom Koordinatenursprung?

LÖSUNG: Zwei Spannvektoren erhalten wir durch

$$\vec{s_1} := P - Q = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \vec{s_2} := P - R = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Wir ermitteln mit dem Vektorprodukt einen zu $\vec{s_1}$ und $\vec{s_2}$ orthogonalen Vektor $\vec{n_0}$:

$$\vec{n_0} := \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat Norm $\sqrt{26}$, also ist

$$-\frac{4\sqrt{26}}{26}x_1 + \frac{3\sqrt{26}}{26}x_2 - \frac{\sqrt{26}}{26}x_3 = \frac{\sqrt{26}}{26}\langle P, \vec{n_0}\rangle = -\frac{\sqrt{26}}{26}$$

die Hessesche Normalenform, der Vektor

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{26}}{26}\begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix}$$

ein Einheitsnormalenvektor und

$$\left|-\frac{\sqrt{26}}{26}\right| = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

der Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung.

Aufgabe H8 (4 Punkte) Betrachten Sie die in Parameterform gegebene Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}.$$

(i) Liegt der Punkt $P := \begin{pmatrix}-4\\12\\7\end{pmatrix}$ in der Ebene?

(ii) Bestimmen sie die Schnittpunkte der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\10\\0\end{pmatrix}$ mit der Ebene E und deuten Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

LÖSUNG: (i) Aufstellen des Gleichungssystems führt auf

$$\begin{aligned} 2+3\lambda &= -4 \\ 2\lambda+4\mu &= 12 \\ 1-2\lambda+\mu &= 7. \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile folgt $\lambda=-2$ und aus der zweiten Zeile folgt damit $\mu=4$. Einsetzen in die dritte Zeile liefert

$$6=4+4=8,$$

ein Widerspruch. Somit folgt $P\notin E$.

(ii) Wir fragen uns, welche Punkte von g in der Ebene E liegen. Dies sind alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5+3t &= 2+3\lambda \\ 2+10t &= 2\lambda+4\mu \\ -1 &= 1-2\lambda+\mu. \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile folgt $3\lambda=3+3t$, also erhalten wir

$$\lambda=1+t.$$

In die zweite Zeile eingesetzt erhalten wir $4\mu=8t$, also

$$\mu=2t.$$

Setzen wir dies in die dritte Zeile ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} -1 &= 1-2(1+t)+2t=1-2-2t+2t \\ &= -1. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, also haben wir für ein vorgegebenes $t\in\mathbb{R}$ den Parameter λ und μ bestimmt, so daß für diesen Parameter der Punkt $g(t)$ rauskommt.
Alternativ hätten wir auch zeigen können, daß der Richtungsvektor von g linear abhängig von den Spannvektoren von E ist und der Stützvektor von g in der Ebene liegt.
Da alle Punkte der Geraden Schnittpunkte mit der Ebene sind, liegt die Gerade in E.

Aufgabe H9 (4 Punkte) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene, die durch den von P bestimmten Punkt geht und senkrecht auf der Geraden g steht.

(i) $\vec{P}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ und $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$

(ii) $\vec{P}=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ und $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$

LÖSUNG: (i) Wir müssen 2 linear unabhängige Vektoren finden, die zum Spannvektor von g orthogonal stehen. Dies ist durch bloßes Hinschauen möglich, offensichtlich leisten

$$\vec{v_1}:=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v_2}:=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

das Gewünschte. Da Der Stützvektor der Geraden in der Ebene liegen muß, ist

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\vec{v_1}+\mu\vec{v_2}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

eine Darstellung der gesuchten Ebene.

(ii) Da die Zahlen nicht so schön gewählt sind, formen wir die Geradengleichung zu was Ganzzahligem um:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Auf dem Spannvektor von g orthogonal stehen die Lösungen der Gleichung

$$\left\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Dies führt auf die Ebenengleichung

$$n_1 + 2n_2 + 6n_3 = 0,$$

welche als Lösungen die Vektoren

$$\vec{n} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

hat. Mit einem geeigneten Stützvektor, dem Stützvektor der Geraden, erhalten wir also die passende Ebenengleichung

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Dies ist die gesuchte Ebene.