Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 26. Oktober 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

2. Übung mit Lösungshinweisen

Wiederholungsaufgaben

(W1) *Winkel in Gradmaß und Bogenmaß*

Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\alpha°$	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$270°$	$360°$

Zeichnen Sie die jeweiligen Winkel am Einheitskreis ein.

(W2) *Sinus- und Kosinusfunktion*

(i) Skizzieren Sie die Funktionen sin und cos jeweils im Intervall $x \in [-2\pi, 2\pi]$. Benennen Sie anhand Ihrer Grafik die Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte der Funktionen.

(ii) Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$0°$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$30°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$
$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

Gruppenübungen

Aufgabe 5 *Rechnen mit Vektoren I*

(i) Gegeben seien die Ortsvektoren $\vec{x} = (2, -3, 1)^T$, $\vec{y} = (1, 0, -2)^T$ und $\vec{z} = (0, 2, -1)^T$. Berechnen Sie

$$3\vec{x}\,, \quad \vec{x} + \vec{y}\,, \quad \vec{x} - 2\vec{z}\,, \quad 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}\,.$$

(ii) Berechnen Sie die Länge der Ortsvektoren $\vec{x} = (8, -2, 4)^T$ und $\vec{y} = (5, 4, -6)^T$.

LÖSUNG: (i)

$$\begin{aligned}
3\vec{x} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\vec{x} + \vec{y} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\vec{x} - 2\vec{z} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \\
3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\| &= \sqrt{84} \\
\|\vec{y}\| &= \sqrt{77}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 *Rechnen mit Vektoren II*

(i) Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$, welche die Diagonalen eines Parallelogramms bilden. Wie berechnen sich die Seitenvektoren dieses Parallelogramms aus $\vec{e}$ und $\vec{f}$?

(ii) Verifizieren Sie nun ihre Resultate am Beispiel des Parallelogramms mit

$$\vec{e} = (4, 2)^T\,, \quad \vec{f} = (1, 2)^T$$

und Mittelpunkt im Koordinatenursprung $(0, 0)^T$. Was sind also die Koordinaten der vier Eckpunkte des Parallelogramms? Berechnen Sie außerdem die Länge seiner Seiten.

LÖSUNG: (i) Sind $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{f} = \vec{b} - \vec{a}$ die Diagonalen des Parallelogramms, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugt wird, so folgt mittels leichtem Umstellen

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{e} - \vec{f}\right), \quad \text{und} \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{e} + \vec{f}\right).$$

Zum Verstndnis kann es hilfreich sein, sich das Parallelogram mit den Diagonalen zu skizzieren.

(ii) Siehe Scan.

Aufgabe 7 *Orthogonale Zerlegung*

(i) Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein fest gewählter Vektor.
Begründen Sie, dass sich jeder beliebige Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ in der Form

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w},$$

schreiben lässt, wobei $\vec{v}$ parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{w}$ senkrecht zu $\vec{a}$ ist.

Hinweis: Gesucht sind also $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in Abhängigkeit von $\vec{u}$ und $\vec{a}$.

(ii) Bestimmen Sie nun speziell $\vec{v}$ und $\vec{w}$, falls

$$\vec{u} = (1, 2, -1)^T, \quad \vec{a} = (2, 0, 1)^T.$$

LÖSUNG: (i) Angenommen, es läßt sich $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ schreiben, so daß $\vec{w}$ orthogonal zu $\vec{a}$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle &= \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{a} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle + 0. \end{aligned}$$

Da wir angenommen haben, $\vec{v} = \lambda \vec{a}$, so folgt

$$\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{v}, a \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{a} \rangle = \lambda \|\vec{a}\|^2.$$

Also erhalten wir

$$\lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}.$$

Insbesondere ist $\lambda = \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle$, wenn $\vec{a}$ ein Vektor mit Länge 1 war.
Nun erhalten wir

$$\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} + \left(\vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \right).$$

Offensichtlich ist dies eine Zerlegung in der gewünschten Form, wir nennen nun

$$\vec{v} := \frac{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

und

$$\vec{w} := \left(\vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \right).$$

(ii) Wir rechnen:

$$\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 2 - 1 = 1, \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{5}, \quad \vec{u} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

$$\vec{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

Aufgabe H4 (4 Punkte) *Geraden in der Ebene und im Raum*
Stellen Sie jeweils die Gleichung der Geraden in Parameterform auf, die durch die Punkte P und Q geht. Bestimmen Sie in Aufgabenteil (i) auch eine implizite Darstellung.

(i) $P = (5, -4)^T$, $Q = (9, -6)^T$

(ii) $P = (2, 3, 5)^T$, $Q = (3, 5, 7)^T$

(iii) $P = \vec{e_1} + b\vec{e_2} - \vec{e_3}$, $Q = 12\vec{e_1} - 6\vec{e_3}$, wobei $b \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl sei.

LÖSUNG: (i) Es gilt

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ein Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann normal auf g, wenn gilt:

$$0 = \left\langle \vec{n}, \vec{PQ} \right\rangle = 4n_1 - 2n_2.$$

Eine nicht triviale Lsung dieser Gleichung ist z. B. der Vektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle + \lambda \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \\ &= 5 - 8 + \lambda \cdot 0 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Also ist

$$x_1 + 2x_2 = -3$$

die implizite Darstellung der Geraden.

(ii) Wir rechnen

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(iii) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \vec{Q} - \vec{P} = 12e_1 - e_1 - be_2 + e_3 - 6e_3 \\ &= \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 \\ -b \\ -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -b \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe H5 (4 Punkte) *Skalar- und Vektorprodukt I*

(a) Es seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ zwei beliebige Vektoren. Beweisen Sie, dass für das Vektorprodukt immer gilt:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = 0 = \langle \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle .$$

(b) Berechnen Sie jeweils $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ bzw. $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ für

(i) $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 5$, $\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 30°$

(ii) $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 5$, $\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 60°$

LÖSUNG: (a) Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ beliebig, so gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aus

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, -\vec{y} \times \vec{x} \rangle = -\langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{x} \rangle$$

folgt mit vertauschten Rollen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

$$\langle \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = -\langle \vec{y}, \vec{y} \times \vec{x} \rangle = 0.$$

(b) Wir verwenden die Formeln aus dem Skript und erhalten:

(i)

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(30°) = \frac{15\sqrt{3}}{2}, \\
\|\vec{x} \times \vec{y}\| &= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin(30°) = \frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(60°) = \frac{15}{2}, \\
\|\vec{x} \times \vec{y}\| &= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin(60°) = \frac{15\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H6 (4 Punkte) *Skalar- und Vektorprodukt II*

(i) Berechnen Sie die Seitenlängen und Winkel des ebenen Dreiecks mit den Eckpunkten

$$A = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T, \quad B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)^T, \quad C = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)^T$$

und fertigen Sie eine Skizze an.

(ii) Identifizieren wir die Ebene mit der x-y-Ebene im $\mathbb{R}^3$, so erhalten wir Punkte

$$\tilde{A} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)^T, \quad \tilde{B} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, 0\right)^T, \quad \tilde{C} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right)^T.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks unter Verwendung des Vektorprodukts. Was wissen Sie nun über den Flächeninhalt des Dreiecks in (i)?

(iii) Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren

$$\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}, \quad \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{C}}, \quad \vec{z} = (1, 1, 2)^T$$

aufgespannten Spats.

LÖSUNG: (i) Die Bezeichnungen sind intuitiv, es bezeichnet z. B. c die dem Punkt C gegenüber liegende Seite. Näheres siehe Scan, dieser ist aber nicht wirklich nötig.

$$a = \left\|\vec{BC}\right\| = \sqrt{17},$$
$$b = \left\|\vec{AC}\right\| = \sqrt{10},$$
$$c = \left\|\vec{AB}\right\| = \sqrt{13}.$$

Für die Winkel verwenden wir die Formel aus dem Skript und erhalten

$$\cos(\alpha) = \frac{\left\langle \vec{AB}, \vec{AC} \right\rangle}{\left\|\vec{AB}\right\| \left\|\vec{AC}\right\|} = \frac{3}{\sqrt{130}}.$$

$$\cos(\beta) = \frac{\left\langle \vec{BC}, \vec{BA} \right\rangle}{\left\|\vec{BC}\right\| \left\|\vec{BA}\right\|} = \frac{10}{\sqrt{221}}.$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\left\langle \vec{CA}, \vec{CB} \right\rangle}{\left\|\vec{CA}\right\| \left\|\vec{CB}\right\|} = \frac{7}{\sqrt{170}}.$$

Somit folgt

$$\alpha \approx 75°, \beta \approx 48°, \gamma \approx 58°.$$

(ii) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist die Hälfte des Flächeninhaltes F des Parallelogramms, welches von $\overrightarrow{\tilde{C}\tilde{A}}$ und $\overrightarrow{\tilde{C}\tilde{B}}$ aufgespannt wird. Dafür haben wir die Formel

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\tilde{C}\tilde{A}} \times \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{B}}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\tilde{C}\tilde{A}}\right\| \left\|\overrightarrow{\tilde{C}\tilde{B}}\right\| \cdot \sin(\gamma) \\ &\approx 5,2 \end{aligned}$$

(iii) Für das Volumen V des Spats gilt:

$$V = \left|\left\langle \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}, \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{C}} \times \vec{z} \right\rangle\right| = |-4 - 18| = 22.$$