Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 09/10 19. Oktober 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

1. Übung mit Lösungshinweisen

Aufgabe 1 Gegeben seien folgende komplexe Zahlen

$$z_1 = 3 + 4i, \qquad z_2 = -2 + i, \qquad z_3 = 7 - i.$$

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z_1, z_2, z_3.

b) Berechnen Sie $z_1 + z_3$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ und $|z_1|$ und geben Sie diese Zahlen in der Form $a + bi$ an.

c) Skizzieren Sie die Zahlen z_1, z_2, z_3 und die in b) berechneten Zahlen in der gaußschen Zahlenebene.

LÖSUNG: a) Es sind $\mathrm{Re}(z_1) = 3$, $\mathrm{Im}(z_1) = 4$, $\mathrm{Re}(z_2) = -2$, $\mathrm{Im}(z_2) = 1$, $\mathrm{Re}(z_3) = 7$ und $\mathrm{Im}(z_3) = -1$.

b) Es gilt

$$\begin{array}{lllllll}
c_1 & = & z_1 + z_3 & = & (3+4i) + (7-i) & = & 10 + 3i \\
c_2 & = & z_1 - z_2 & = & (3+4i) - (-2+i) & = & 5 + 3i \\
c_3 & = & z_1 z_2 & = & (3+4i)(-2+i) & = & -6 + 3i - 8i - 4 \quad = \quad -10 - 5i \\
c_4 & = & \dfrac{z_1}{z_2} & = & \dfrac{3+4i}{-2+i} & = & \dfrac{(3+4i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} \\
 & & & = & \dfrac{-6-3i-8i+4}{4+1} & = & -\dfrac{2}{5} - \dfrac{11}{5} i \\
c_5 & = & |z_1| & = & |3+4i| & = & \sqrt{3^2+4^2} \quad = \quad 5
\end{array}$$

(c) Siehe Scan.

Aufgabe 2 Für eine komplexe Zahl $\mathbb{C} \ni z = a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $\overline{z} := a - i \cdot b \in \mathbb{C}$ die *zu z konjugierte Zahl*.

(a) Beweisen Sie, dass für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Regel $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Regel $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ gilt.

(c) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion folgende Aussage: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt für jede Wahl $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ die Regel

$$\overline{\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}.$$

(d) Zeigen Sie, daß für jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ die Identität $\overline{\overline{z}} = z$ gilt.

(e) Beschreiben Sie die Wirkung der komplexen Konjugation geometrisch in der gaußschen Zahlenebene.

LÖSUNG: Im folgenden sind $z_1 = a_1 + b_1 i)$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$, beliebige komplexe Zahlen, wobei $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

(a)

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i} \\
&= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i} \\
&= a_1 + a_2 - b_1 i - b_2 i \\
&= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) \\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i} \\
&= a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i.
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a_1 - b_1 \cdot i) \cdot a_2 - b_2 \cdot i) \\
&= a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \cdot i - a_1 \cdot b_2 \cdot i \\
&= a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i.
\end{aligned}$$

Damit stimmen beide Seiten überein und es folgt die Behauptung.

(c) Wir wollen für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Behauptung

$$A(n) : \overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

zeigen. Dazu verwenden wir das Verfahren der vollständigen Induktion.
(IA) In Aufgabenteil (b) haben wir $A(2)$ gezeigt. $A(1)$ ist offensichtlich wahr, da $\prod_{k=1}^{1} z_k = z_1$ gilt.
(IS) Es sei $A(n)$ wahr für $n \geq 2$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\prod_{k=1}^{n+1} z_k \right)} &= \overline{\left(\prod_{k=1}^{n} z_k \right) \cdot z_{n+1}} \\
&= \overline{\left(\prod_{k=1}^{n} z_k \right)} \cdot \overline{z_{n+1}} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} \overline{z_k} \right) \cdot \overline{z_{n+1}} \\
&= \prod_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}.
\end{aligned}$$

(d)

$$\overline{\overline{z_1}} = \overline{a_1 - b_1 i} = a_1 + b_1 i = z_1.$$

(e) Die komplexe Konjugation spiegelt an der reellen Zahlenebene.

Aufgabe 3 Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

LÖSUNG: Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion.
Induktionsanfang ($n = 1$):
Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ auf der linken Seite. Für die rechte Seite der Gleichung erhalten wir $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$. Also ist die Behauptung für $n = 1$ richtig.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsschritt: Wir zeigen die Behauptung für $n+1$ unter Verwendung der Induktionsannahme. Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &&=_{\text{Ind.ann.}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} &&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} &&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Also ist die Behauptung mit vollständiger Induktion bewiesen.

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, so dass folgende Ungleichungen bzw. Gleichungen erfüllt sind:

$$(1) \quad \frac{x-4}{x^2-9} \leq 0, \; x \neq \pm 3, \qquad (2) \quad \frac{3x-1}{(x-4)^2} = \frac{1}{2}, \; x \neq 4.$$

(b) Bestimmen Sie

$$s = \sum_{k=1}^{100} k^{42} + \sum_{m=2}^{101} [75 - (m-1)^{42}].$$

LÖSUNG: (a) (1) Fall 1: $x^2 - 9 > 0$, d. h. $|x| > 3$. Wir erhalten folgende Äquivalenzumformungen:

$$\frac{x-4}{x^2-9} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4.$$

Die letzte Ungleichung ist mit der Voraussetzung $|x| > 3$ genau dann erfüllt, wenn $x \in \{x \in \mathbb{R} : x < -3 \text{ oder } 3 < x \leq 4\}$.

Fall 2: $x^2 - 9 < 0$, d. h. $|x| < 3$. Wir erhalten

$$\frac{x-4}{x^2-9} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4.$$

Kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt die letzte Ungleichung und die Voraussetzung $|x| < 3$.

Insgesamt ist die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 4 \text{ oder } x < -3\}$.

(2) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{3x-1}{(x-4)^2} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 14x + 18 = 0. \end{aligned}$$

Die p-q-Formel liefert die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{31}.$$

(b) Es gilt:

$$s = \sum_{k=1}^{100} k^{42} + \sum_{m=2}^{101} [75 - (m-1)^{42}] \overset{l=m-1}{=} \sum_{k=1}^{100} k^{42} + \sum_{l=1}^{100} [75 - l^{42}] = \sum_{l=1}^{100} 75 = 7500.$$

Hausübungen

Aufgabe H1 Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + 2i.$$

(a) Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ und geben Sie diese Zahlen in der Form $a + bi$ an.

(b) Skizzieren Sie z_1 und z_2, sowie die berechneten komplexen Zahlen in der Zahlenebene.

Lösung: (a)

$$\begin{aligned} c_1 &= z_1 + z_2 = 3i \\ c_2 &= z_1 z_2 = -3 + i \\ c_3 &= \frac{z_2}{z_1} = \frac{(-1+2i)(1-i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ c_4 &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+i)(-1-2i)}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

Aufgabe H2 Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung: Fr $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr, da das linke Produkt per Definition 1 ist. Die rechte Seite ist für $n = 1$ ebenfalls 1. Weiter führen wir vollständige Induktion für die Fälle $n > 1$ durch.

Induktionsanfang (n=2): $\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$. Also ist die Aussage für $n = 2$ richtig.

Induktionsschritt: Sei die Vermutung für ein $n \geq 2$ bewiesen (Induktionsannahme), dann gilt sie auch für $n + 1$, denn

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \frac{n+1}{2n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung mit vollständiger Induktion bewiesen.
Alternativ hätten wir die vollständige Induktion bei $n = 1$ anfangen lassen können, der Induktionsschritt von oben funktioniert in diesem Fall auch.

Aufgabe H3

(a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, so dass folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$(1) \quad |x-5| + x \leq 7, \qquad (2) \quad |x-5| \leq |x+5|$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Wert (in Abhängigkeit von n) von

$$t(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{k+2} + \sum_{m=n+3}^{2n+2} \frac{m-2}{m}.$$

LÖSUNG: (a) (1) Fall 1: $x - 5 \geq 0$, d. h. $x \geq 5$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & |x-5| + x \leq 7 \\ \Leftrightarrow \quad & x - 5 + x \leq 7 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 6. \end{aligned}$$

Fall 2: $x - 5 < 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & |x-5| + x \leq 7 \\ \Leftrightarrow \quad & -x + 5 + x \leq 7 \\ \Leftrightarrow \quad & 5 \leq 7. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir, dass für $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung genau dann erfüllt ist, falls $x \leq 6$.

(2) Wir betrachten 3 Fälle: Erster Fall: $x > 5$. Dann gilt $|x+5| = x+5$ und $|x-5| = x-5$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} |x-5| & \leq |x+5| \\ \Leftrightarrow x-5 & \leq x+5 \\ \Leftrightarrow 0 & \leq 10. \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage, also erfüllen alle $x > 5$ die Ungleichung.
Zweiter Fall: $-5 \leq x \leq 5$. Hier gilt $|x+5| = x+5$ und $|x-5| = 5-x$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} |x-5| & \leq |x+5| \\ \Leftrightarrow 5-x & \leq x+5 \\ \Leftrightarrow 0 & \leq 2x \\ \Leftrightarrow 0 & \leq x. \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $0 \leq x \leq 5$, also erfüllen diese Zahlen ebenfalls die Ungleichung.
Dritter Fall: $x < -5$. Dann gilt $|x+5| = -x-5$ und $|x-5| = 5-x$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} |x-5| & \leq |x+5| \\ \Leftrightarrow 5-x & \leq -x-5 \\ \Leftrightarrow 0 & \leq -10. \end{aligned}$$

Dies ist eine falsche Aussage, also erfüllt keine Zahl $x < -5$ die Ungleichung.
Zusammengefaßt erfüllen alle Elemente der Menge

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty[= [0, \infty)$$

die Ungleichung (2).

(b)

$$
\begin{aligned}
t(n) &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{k+2} + \sum_{m=n+3}^{2n+2} \frac{m-2}{m} \overset{l=m-2}{=} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{k+2} + \sum_{l=n+1}^{2n} \frac{l}{l+2} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = n.
\end{aligned}
$$