Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
09./10. Februar 2010

15. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Hinweis: Die Aufgaben der heutigen Übung sind Beispiele für Aufgaben, die Teil einer Klausur zur Veranstaltung sein könnten. Es wird empfohlen, einige der Aufgaben zur Klausurvorbereitung unter Klausurbedingungen zu lösen. (Der Umfang der Klausur wird geringer sein, als der Gesamtumfang aller Aufgaben auf diesem Blatt.)

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie die folgende Ungleichung mittels vollständiger Induktion:

$$a_n < \sqrt{n} + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $a_1 = 1$, $a_{n+1} := \sqrt{(n+1) + a_n}$.

Lösungshinweise:
Induktionsanfang ($n = 1$):$\sqrt{1} < \sqrt{1} + 1$.
Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir müssen zeigen, dass $a_{n+1} < \sqrt{n+1} + 1$ und berechnen

$$a_{n+1} = \sqrt{(n+1) + a_n} \overset{\text{IH}}{<} \sqrt{(n+1) + \sqrt{n} + 1}.$$

Jetzt beweisen wir die Ungleichung

$$\sqrt{(n+1) + \sqrt{n} + 1} < \sqrt{n+1} + 1\,. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Leftrightarrow \quad (n+1) + \sqrt{n} + 1 < (n+1) + 2\sqrt{n+1} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad n < 4(n+1) \quad \Leftrightarrow \quad n < 4n + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 3n + 1.\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung (1) bewiesen und es folgt, dass $a_{n+1} < \sqrt{n+1} + 1$ und damit die Behauptung. □

Aufgabe G2 (Stetige Fortsetzbarkeit)

Gegeben sei $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}.$$

Ist f stetig? Untersuchen Sie, ob die Funktion f sich zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt. Geben Sie gegebenenfalls die Funktion $\tilde{f}$ an.

Lösungshinweise: Für $|x| \neq 2$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wir untersuchen nun das Verhalten der Funktion in den Punkten $x = \pm 2$:
Möglichkeit 1 (empfohlen): Sei $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. Dann gilt

$$\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)} = 3+\sqrt{x^2+5}\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{x\to\pm 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = 6\,.$$

Also können wir die Funktion f in $x = \pm 2$ stetig fortsetzen mit

$$\tilde{f}(x) = 3+\sqrt{x^2+5}\,.$$

Möglichkeit 2: Wir wollen die Regel von de l'Hospital anwenden, um $\lim_{x\to\pm 2} f(x)$ zu bestimmen. Seien $D_1 = (a_1, b_1)$, $D_2 = (a_2, b_2)$ so gewählt, dass $2 \in D_1$ und $-2 \in D_2$. Seien $g(x) = 4 - x^2$ und $h(x) = 3 - \sqrt{x^2+5}$. Dann ist $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Zuerst überprüfen wir die Vorraussetzungen für $f(x)$ auf D_1 bzw. D_2:

- g, h sind differenzierbar.
- $\lim_{x\to\pm 2} g(x) = 4 - 4 = 0 = 3 - \sqrt{4+5} = \lim_{x\to\pm 2} h(x)$.
- $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \neq 0$ für $x \neq 0$, also $D_1 = (0, b_1)$ und $D_2 = (a_2, 0)$.
- $$\lim_{x\to\pm 2} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to\pm 2} \frac{2x}{\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}} = 6,$$

  Also existiert der Grenzwert $\lim_{x\to\pm 2} \frac{g'(x)}{h'(x)}$.

Wir können also die Regel von de l'Hospital anwenden und bekommen

$$\lim_{x\to\pm 2} f(x) = \lim_{x\to\pm 2} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\pm 2} \frac{g'(x)}{h'(x)} = 6\,.$$

Somit können wir die Funktion f in $x = \pm 2$ stetig fortsetzen.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}, & x \in D, \\ 6, & x = \pm 2 \end{cases}.$$

Aufgabe G3 (Extrema)
Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln(x)$.

Lösungshinweise: Zunächst bestimmen wir alle kritschen Punkte von f, dass heißt alle x mit $f'(x) = 0$. Die erste Ableitung der Funktion berechnet sich zu

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

Setzt man diese gleich 0, um die Extrema zu bestimmten ergibt sich:

$$\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \approx 0,37.$$

Durch Bestimmen der 2. Ableitung überprüfen wir nun (Satz III.2.8), ob dort ein Minimum oder Maximum vorliegt:

$$f''(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Einsetzen von e^{-1} ergibt:

$$f''(\frac{1}{e}) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0\,.$$

Somit hat die Funktion an der Stelle e^{-1} ein lokales Minimum.
Da f' stetig ist und keine weiteren Nullstellen hat, folgt daraus $f'(x) < 0$ (alternativ kann dies auch direkt überprüft werden) für $x < 1/e$ und f ist nach Satz III.2.5 in diesem Bereich streng monoton fallend und analog für $x > 1/e$ streng monoton steigend. Somit folgt, dass $1/e$ lokales und globales Minimum von f ist und das f keine lokalen oder globalen Maxima hat. $\square$

Aufgabe G4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

(a) Was besagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ gilt:

$$e^b - e^a < e^b(b-a).$$

Lösungshinweise:

(a) Sei $D = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(b) Sei $D = [a, b]$ und $f(x) = e^x$. Dann ist f stetig und differenzierbar auf D und wir können wir Mittelwertsatz anwenden. Wir erhalten, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt, so dass

$$e^c = \frac{e^b - e^a}{b-a} \;\Leftrightarrow\; e^b - e^a = e^c(b-a).$$

Da e^x eine wachsende Funktion ist, kriegen wir

$$e^b - e^a = e^c(b-a) < e^b(b-a).$$

Aufgabe G5 (Integration)

(a) Berechnen Sie das folgende Integral durch Substitution:

$$\int_{12}^{24} \frac{1}{\sqrt{2x+1}-3}dx$$

Hinweis: Substituieren Sie $u := \sqrt{2x+1} - 3$

(b) Berechnen Sie das folgende Integral mittels partieller Integration:

$$\int_1^e \sin(\ln(x))dx$$

Lösungshinweise:

(a) Sei $u := \sqrt{2x+1} - 3$. Dann ist $x = g(u) = \frac{(u+3)^2-1}{2}$. Mit $g'(u) = u + 3$ und $g^{-1}(x) = u = \sqrt{2x+1} - 3$ ergibt sich das Integral mit der Substitutionsregel (Satz IV.2.3) zu

$$\begin{aligned}\int_{12}^{24} \frac{1}{\sqrt{2x+1}-3}dx &= \int_{g^{-1}(12)}^{g^{-1}(24)} \frac{1}{\sqrt{2g(u)+1}-3} \cdot g'(u)\,du = \int_2^4 \frac{1}{u} \cdot (u+3)du \\ &= \int_2^4 1du + \int_2^4 \frac{3}{u}du = [u]_2^4 + [3 \cdot \ln(u)]_2^4 \\ &= 4 - 2 + 3 \cdot \ln(4) - 3 \cdot \ln(2) = 2 + 3 \cdot \ln(4) - 3 \cdot \ln(2) = 2 + 3\ln 2\,.\end{aligned}$$

(b) Wir benutzen partielle Integration (Satz IV.2.1) mit $g(x) = \sin(\ln(x))$ und $f(x) = x$ also $f'(x) = 1$ und danach nochmals partielle Integration mit $g(x) = \cos(\ln(x))$ und $f(x) = x$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \sin(\ln(x))dx &= [\sin(\ln(x)) \cdot x]_1^e - \int_1^e x \cdot \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}dx \\
&= [\sin(\ln(x)) \cdot x]_1^e - \int_1^e \cos(\ln(x)) \cdot 1dx \\
&= [\sin(\ln(x)) \cdot x]_1^e - \left([\cos(\ln(x)) \cdot x]_1^e - \int_1^e x \cdot (-\sin(\ln(x))) \cdot \frac{1}{x}dx \right) \\
&= [\sin(\ln(x)) \cdot x]_1^e - [\cos(\ln(x)) \cdot x]_1^e - \int_1^e \sin(\ln(x))dx\,.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
2 \cdot \int_1^e \sin(\ln(x))\,dx &= [\sin(\ln(x)) \cdot x]_1^e - [\cos(\ln(x)) \cdot x]_1^e \\
\Leftrightarrow \int_1^e \sin(\ln(x))\,dx &= \frac{1}{2} \cdot [\sin(\ln(x)) \cdot x]_1^e - \frac{1}{2} \cdot [\cos(\ln(x)) \cdot x]_1^e \\
&= \frac{1}{2} \cdot [\sin(1) \cdot e - \sin(0) \cdot 1] - \frac{1}{2} \cdot [\cos(1) \cdot e - \cos(0) \cdot 1] \\
&= \frac{1}{2} \cdot [\sin(1) \cdot e] - \frac{1}{2} \cdot [\cos(1) \cdot e - 1]\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe G6 (Konvergenz von Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz sowie absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}.$$

Lösungshinweise: Da $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die erste Reihe nach dem Majorantenkriterium (sogar absolut).

Da

$$\left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$$

für $n \to \infty$, konvergiert die zweite Reihe nach dem Quotientenkriterium (sogar absolut).

Da $n^2 > 2n+1$ für $n \geq 3$ (vergl. Übung 1) ist $a_n = \frac{n^2}{2n+1}$ keine Nullfolge. Folglich ist die letzte Reihe divergent.

Aufgabe G7 (Funktionenfolgen)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-n, & \text{falls } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 1, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und berechnen Sie die Grenzfunktion f.

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx\,.$$

(c) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig gegen f?

Lösungshinweise:

(a) Zum Nachweis der punktweisen Konvergenz der Funktionenfolge unterscheiden wir drei Fälle:

$\underline{x=0}$: In diesem Fall gilt

$$f_n(0) = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1 = f(0).$$

$\underline{x=1}$: Wie im vorigen Fall ist

$$f_n(1) = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1 = f(1).$$

$\underline{x \in (0,1)}$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für ein fest vorgegebenes $x \in (0,1)$ wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{N} < x.$$

Dies bedeutet, dass

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt und dass somit wegen

$$f_n(x) = 1$$

für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| = |1-1| = 0 < \varepsilon$$

folgt.

Damit haben wir gezeigt, dass die Funktionenfolge auf $[0,1]$ *punktweise* gegen die Grenzfunktion $f(x) = 1$ konvergiert.

(b) Wir erhalten

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

und

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^{\frac{1}{n}-a} 1 - n\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 1\,dx = \lim_{a\to 0}\,(1-n)\cdot [x]_a^{\frac{1}{n}-a} + 1 - \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{a\to 0}\,(1-n)\cdot\left(\frac{1}{n} - a - a\right) + 1 - \frac{1}{n} = (1-n)\cdot\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 0\,.$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,.$$

(c) **Möglichkeit 1**: (Vergleiche Beweis von Satz VI.1.18) Wenn die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergieren würde, so gäbe es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||f_n - g||_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ Daraus ergibt sich

$$\left| \int_0^1 f_n(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \|f_n - g\|_\infty = \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

müsste erfüllt sein. Da hier jedoch

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0 \neq 1 = \int_0^1 f(x)\,dx$$

gilt, kann die Funktionenfolge auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren. $\square$

Möglichkeit 2: Es gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} n, & \text{falls } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases},$$

und somit ist $\|f_n - f\|_\infty = n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht im Sinne der Supermumsnorm gegen f, konvergiert also nicht gleichmäßig. $\square$