Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
02./03. Februar 2010

14. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Potenzreihen und Konvergenzradius)

(a) Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen für $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x)^n$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(x-1)^{5k}$.

Hinweis: Verwenden Sie bei (ii) eine geeignete Substitution.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihe in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lösungshinweise:

(a) (i) Zunächst beobachten wir, dass gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$. Wir benutzen das Quotientenkriterium für Potenzreihen (Satz VI.2.4):

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{(n+1)2^n}{n \cdot 2^{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2},$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Der Konvergenzradius ist also $\rho = \frac{1}{2}$.

(ii) Mit $z = (x-1)^5$ schreibt sich die gegebene Reihe als $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} z^k$.

Wir bestimmen zunächst den Konvergenzradius dieser Reihe: Wegen

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

ist der Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ nach dem Wurzelkriterium (Satz VI.2.6). Also konvergiert die ursprüngliche Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x-1|^5 = |z| < \tfrac{1}{2}, \quad \text{d.h.} \quad |x-1| < \tfrac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Der Konvergenzradius ist damit $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

(b) Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\left(a^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty; & \text{falls } |a|>1, \\ 1; & \text{falls } |a|=1, \\ 0; & \text{falls } |a|<1. \end{cases}$$

Damit gilt für den Konvergenzradius

$$r = \begin{cases} 0, & \text{falls } |a|>1, \\ 1, & \text{falls } |a|=1, \\ \infty, & \text{falls } |a|<1. \end{cases}$$

Aufgabe G2 (Taylorpolynom)

Betrachten Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \sin^2(x)\cdot e^x\ .$$

(a) Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom $T_4 f$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, indem Sie die ersten 4 Ableitungen bilden.

(b) Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom $T_4 f$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, indem Sie bekannte Potenzreihen von $\sin x$ und e^x verwenden.

Bemerkung: Zu einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bezeichnen wir das n-te Taylorpolynom von f im Entwicklungpunkt $x_0 = 0$ als $T_n f$.

Lösungshinweise:

(a) Wir bilden die ersten vier Ableitungen von f an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x)e^x + \sin^2(x)e^x = \sin(2x)e^x + f(x)\ , & f'(0) &= 0\ , \\ f''(x) &= 2\cos(2x)e^x + \sin(2x)e^x + f'(x)\ , & f''(0) &= 2\ , \\ f^{(3)}(x) &= 4\cos(2x)e^x - 3\sin(2x)e^x + f''(x)\ , & f^{(3)}(0) &= 6\ . \\ f^{(4)}(x) &= -2\cos(2x)e^x - 11\sin(2x)e^x + f^{(3)}(x)\ , & f^{(4)}(0) &= 4\ . \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom ist somit

$$\begin{aligned} T_4 f(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 \\ &= \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{4}{4!}x^4 = x^2 + x^3 + \tfrac{1}{6}x^4\ . \end{aligned}$$

(b) Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \ldots\ , \tag{1}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \ldots \tag{2}$$

Für die Funktion f erhalten wir also

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \ldots\right)^2\cdot\left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \ldots\right) \\ &= \left(x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \ldots\right)\left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \ldots\right) \\ &= x^2 + x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{3}x^4 + \ldots = x^2 + x^3 + \tfrac{1}{6}x^4 + \ldots\ . \end{aligned}$$

Als Taylorpolynom ergibt sich damit wie zuvor $T_4 f(x) = x^2 + x^3 + \frac{1}{6}x^4$.

Aufgabe G3 (Potenzreihen und Integration sowie Differentiation)

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^n \,.$$

(a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius ρ und geben Sie für $x \in (-\rho, \rho)$ den Wert $f(x)$ der Potenzreihe an.

(b) Bestimmen Sie eine Potenzreihe für das Integral

$$\int_0^x \frac{16}{16+t}\, dt \,,$$

wobei $|x| < \rho$.

(c) Bestimmen Sie eine Potenzreihe und deren Wert für die Ableitung $f'(x)$, wobei $|x| < \rho$.

Lösungshinweise:

(a) Gegeben ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^n \,.$$

Mit

$$a_n := \frac{(-1)^n}{4^{2n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{16}\right)^n} = \frac{1}{16} \,,$$

womit sich mit dem Wurzelkriterium (Satz VI.2.6) der Konvergenzradius

$$\rho = 16$$

ergibt.

Ist nun $x \in (-16, 16)$ beliebig gewählt, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{16}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{16}\right)} = \frac{16}{16+x} \,,$$

(geometrische Reihe) und somit ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^n = \frac{16}{16+x} \,.$$

(b) Es sei ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 16$ vorgegeben. Mit Satz VI.2.8 folgt

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\, dt &= \int_0^x \frac{16}{16+t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{4^{2n}} t^n \, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{16^{n-1}} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n. \end{aligned}$$

(c) Es sei erneut ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 16$ gewählt. Nach Satz VI.2.8 folgt

$$f'(x) = \frac{-16}{(16+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\frac{(-1)^{n+1}}{16^{n+1}}\,x^n\,.$$

Aufgabe G4 (Satz von Taylor)

Beweisen Sie mithilfe des Satzes von Taylor folgende Aussage:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion mit $f^{(n+1)}(x) = 0$. Dann ist f ein Polynom mit Grad kleiner gleich n.

Lösungshinweise: Mit dem Satz von Taylor gilt für alle $u, x \in [a,b]$, dass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k + \frac{1}{n!}\int_u^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\;dt \\ &= f(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k\,, \end{aligned}$$

da $f^{(n+1)}(t) = 0$. Also ist f ein Polynom mit Grad kleiner gleich n. □