Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
26./27. Januar 2010

13. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Reihen)

Überprüfen Sie anhand geeigneter Kriterien, ob die folgenden Reihen konvergieren bzw. absolut konvergieren. Bestimmen Sie für (a) und (d) den Grenzwert der Reihe.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-3)^k}{4^k}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$,

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1})$,

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Lösungshinweise:

(a) Es gilt

$$\left|\frac{2+(-3)^k}{4^k}\right| \leq \frac{2+3^k}{4^k} \leq \frac{2\cdot 3^k}{4^k} = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Die Reihe $2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ ist eine geometrische Reihe und konvergiert demzufolge. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-3)^k}{4^k}$ absolut. Der Genzwert der Reihe lautet

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-3)^k}{4^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{4^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k} \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{3}{4})^k = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{68}{21}.\end{aligned}$$

(b) Diese Reihe ist nicht konvergent, denn für $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

(c) Sei $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1}$, dann gilt (durch Erweitern mit $\sqrt{n}-1$ bzw. $\sqrt{n}+1$):

$$a_n = \frac{2\sqrt{n}}{n-1} = 2\frac{\sqrt{n}}{n-1} > 2\frac{\sqrt{n}}{n} \overset{\sqrt{n}\geq 1}{\geq} \frac{2}{n}.$$

Die Reihe $2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist jedoch divergent (harmonische Reihe) und mit dem Minorantenkriterium (Kontraposition des Majorantenkriteriums) folgt auch die Divergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1})$.

(d) Es gilt

$$\left|\frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}}\right| \leq \frac{28+3^{k-1}}{4^{k+2}} \leq \frac{28 \cdot 3^k}{4^k} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{7}{12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Die Reihe $\frac{7}{12} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ konvergiert (geometrische Reihe) und nach dem Majorantenkriterium konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}}$.
Der Grenzwert der Reihe berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k+2}} &= \frac{1}{4^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{28+(-3)^{k-1}}{4^{k-1}} \\
&= \frac{1}{64} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{28+(-3)^k}{4^k} \\
&= \frac{1}{64}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{28}{4^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(-\frac{3}{4}\Big)^k\Big) \\
&= \frac{28}{64} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{7}{12} + \frac{1}{112}.
\end{aligned}$$

(e) Da $\frac{1}{n\sqrt{n}} = n^{-3/2}$ folgt die absolute Konvergenz aus dem Beispiel nach Satz V.2.15 im Skript. Alternativ benutzt man direkt das Integralkriterium mit $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Die Funktion f ist auf $[1, \infty]$ stetig, positiv, monoton fallend und es gilt

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_1^{\infty} = 2.$$

Da das Integral existiert, konvergiert auch die Reihe.

Aufgabe G2 (Funktionenfolgen)
Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie einige der Funktionen f_n für verschiedene Werte von n.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Lösungshinweise:

(a) Siehe Abbildung 1.

(b) Für jedes $x \in (0,1]$ gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n > \frac{1}{x}$ und somit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Für $x = 0$ gilt allerdings $f_n(x) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_n$ punktweise gegen die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass jede der Funktionen f_n stetig ist, allerdings die Grenzfunktion f nicht. Somit kann $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren.

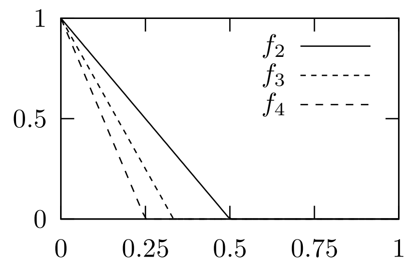

Abbildung 1:

Alternativ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1]} f_n(x) = 1 \ ,$$

so dass nicht $\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0$ gilt, das heißt, die Folge $(f_n)_n$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen f.

Aufgabe G3 (Wurzelkriterium)
Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3 + (-1)^n)^n}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe für $|x| < 2$ konvergiert und für $|x| > 4$ divergiert.
Hinweis: Benutzen Sie das Wurzelkriterium für eine Majorante und eine Minorante der Reihe.

Lösungshinweise: Sei $a_n = \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}$. Offensichtlich gilt

$$|a_n| \leq \frac{x^n}{(3-1)^n} = \left(\frac{x}{2}\right)^n =: b_n \qquad \text{und} \qquad |a_n| \geq \frac{x^n}{(3+1)^n} = \left(\frac{x}{4}\right)^n =: c_n \ .$$

Wir berechnen nun $\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{x}{2}\right)^n} = \frac{x}{2}$. Aus dem Wurzelkriterium folgt nun die Konvergenz von $\sum b_n$ und somit (Majorantenkriterium) von $\sum a_n$ für $x < 2$. Analog ergibt sich die Divergenz von $\sum c_n$ und somit (Minorantenkriterium) von $\sum a_n$ für $x > 4$. □

Aufgabe G4 (Funktionenfolgen und -reihen)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \sqrt[n]{n^2x^3}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \qquad$ mit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) := e^{-n\cdot(2+\cos x)}$.

Hinweis: In (a) können Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ verwenden.

Lösungshinweise:

(a) Für jedes $x \in (0, 2]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x})^3 = 1^2 \cdot 1^3 = 1 \ .$$

Für $x = 0$ gilt $\sqrt[n]{n^2x^3} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\lim_n \sqrt[n]{n^2x^3} = 0$. Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert somit punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion f_n stetig, die Grenzfunktion f hingegen nicht. Somit kann die Folge $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $-1 \leq \cos x \leq 1$. Daraus folgt $e^{-3n} \leq e^{-n(2+\cos x)} \leq e^{-n}$ und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e^{-n(2+\cos x)}| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(2+\cos x)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} .$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ ist wegen $0 \leq \frac{1}{e} \leq 1$ eine konvergente geometrische Reihe. Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(2+\cos x)}$ konvergiert folglich gleichmäßig (und damit auch punktweise) auf $\mathbb{R}$ (vergl. Satz VI.1.4).

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Majoranten und Minoranten) (1+1+1 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Reihen eine Majorante bzw. eine Minorante, von der bekannt ist, dass sie konvergiert bzw. divergiert.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{k^3+2k^2+5k-1}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+\sqrt{k}}{k^3+2k^2+5k-1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$.

Lösungshinweise:

(a) Es gilt

$$\frac{k+\sqrt{k}}{k^3+\underbrace{2k^2+5k-1}_{\geq 0}} \quad \leq \quad \frac{k+k}{k^3} = \frac{2}{k^2}.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{k^2}$ eine Majorante.

(b) Es gilt

$$\frac{k^2+\sqrt{k}}{k^3+2k^2+5k-1} \quad \geq \quad \frac{k^2}{k^3+2k^3+5k^3} = \frac{1}{8k}.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{k}$ eine Minorante.

(c) Da $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}$ und die Reihe $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert (harmonische Reihe), muss nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ divergieren.

Aufgabe H2 (Konvergenz) (3 Punkte)

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \frac{1}{k})^k$$

Lösungshinweise: Um das Wurzelkriterium anzuwenden berechnen wir

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha + \frac{1}{k}|^k} = \lim_{k\to\infty} |\alpha + \frac{1}{k}| = |\alpha|$$

Die Reihe ist also nach dem Wurzelkriterium konvergent falls $|\alpha| < 1$ und divergent falls $|\alpha| > 1$ ist. Gilt $\alpha = 1$, dann ist die Folge $(\alpha + \frac{1}{k})^k \geq 1$ keine Nullfolge, und die Reihe divergiert. Gilt $\alpha = -1$, dann ist

$$\lim_{k\to\infty}(-1 + \frac{1}{k})^k = \lim_{k\to\infty}\left(-1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{k})^{k+1}}(-1)^{k+1}.$$

Auch in diesem Fall ist $(\alpha + \frac{1}{k})^k$ keine Nullfolge, denn $\lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{k})^{-k} = \frac{1}{e}$.

Aufgabe H3 (Funktionenfolgen) (2+2 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$, $\quad x \in [0, 1]$,

(b) $g_n = \sin(\frac{x}{n})$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweise:

(a) Für alle $x \in [0, 1]$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{nx^2}{n^3+x^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^2}{n^3+x^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach Satz VI.1.4 die Funktionenreihe gleichmäßig auf $[0, 1]$.

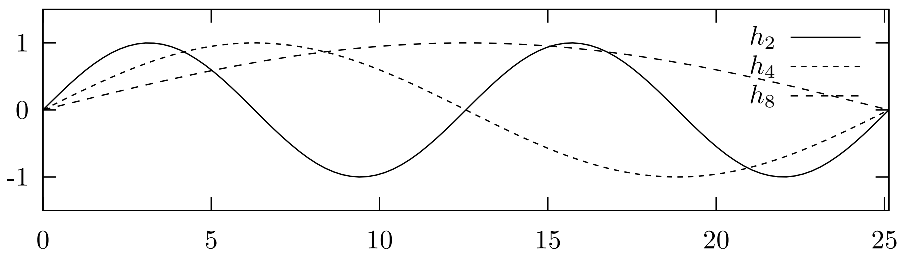

Abbildung 2:

(b) Siehe Abbildung 2. Aufgrund der Stetigkeit der Sinusfunktion gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\frac{x}{n}) = \sin(\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}) = \sin 0 = 0\ .$$

Die Folge $(h_n)_n$ konvergiert somit punktweise gegen die konstante Nullfunktion $h \equiv 0$. Setzen wir jedoch $x_n := \frac{n\pi}{2}$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|h_n(x_n) - h(x_n)| = |\sin(\frac{\pi}{2})| = 1\ .$$

Die Funktionenfolge $(h_n)_n$ kann somit nicht gleichmäßig gegen h konvergieren.