Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
19./20. Januar 2010

12. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Logarithmus-Funktion)
Sei $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert als

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Zeigen Sie mithilfe der Integraleigenschaften und ohne die Eigenschaften des Logarithmus zu benutzen, dass

$$L(uv) = L(u) + L(v)$$

für $u, v \in (0, \infty)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Substitutionen $t = vx$ bzw. $x = t/v$.

Lösungshinweise:

$$L(uv) = \int_1^{uv} \frac{1}{t}\, dt = \int_{\frac{1}{v}}^{u} \frac{1}{vx} v\, dx = \int_{\frac{1}{v}}^{1} \frac{1}{x}\, dx + \int_1^u \frac{1}{x}\, dx = L(u) + \int_{\frac{1}{v}}^{1} \frac{1}{x}\, dx = L(u) + \int_1^v \frac{1}{\frac{t}{v}} \frac{1}{v}\, dt =$$

$$L(u) + L(v).$$

Aufgabe G2 (Konvergenz und absolute Konvergenz)
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz sowie absolute Konvergenz.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$,

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 2^n}$,

(vi) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{2k-1}$.

Lösungshinweise:

(i) Diese Reihe ist nicht konvergent, denn für $a_k = \left(\frac{k}{k+1}\right)$ gilt nicht $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(ii) Da $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert diese Reihe nach dem Majorantenkriterium absolut.

(iii) Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!n!(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}}$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 4 > 1$$

und die Reihe damit divergent.

(iv) Minorantenkriterium (Kontraposition des Majorantenkriteriums): Sei $a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ und $b_n = \frac{1}{n}$. Da $a_n > b_n$ für alle $n \geq 3$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert, so divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(v) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(n+1)^n}{2n^n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1.$$

Also ist die Reihe divergent.

(vi) Man benutzt das Integralkriterium mit $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, $D(f) = [1, \infty[$. Die Funktion f ist auf ihrem Definitionsbereich stetig, positiv, monoton fallend und es gilt

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \tfrac{1}{2x-1}dx = \left[\frac{1}{2}\cdot \ln(2x-1)\right]_1^{\infty}.$$

Da das Integral nicht existiert, konvergiert auch die Reihe nicht.

Aufgabe G3 (Cauchy-Produkt)

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot q^n, \qquad |q| < 1.$$

(i) Ist die Reihe konvergent bzw. absolut konvergent?

(ii) Zeigen Sie unter Verwendung des Cauchy-Produktes, dass der Wert der Reihe $(\frac{1}{1-q})^2$ ist.

Lösungshinweise:

(i) Es gilt für $a_n = (n+1)q^n$, $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n+2}{n+1}|q| = |q| < 1$$

und mit dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz der Folge.

(ii) Sei $c_n = (n+1)q^n$, dann läßt sich c_n auch als

$$c_n = q^0 \cdot q^n + q\cdot q^{n-1} + \ldots + q^n \cdot q^0 \,,$$

schreiben, das heißt

$$c_n = a_0\cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ folgt mit Satz V.2.14 (Cauchy-Product)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\Big)^2 = \Big(\tfrac{1}{1-q}\Big)^2.$$

□

Aufgabe G4 (Leibniz-Kriterium)

Ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium für Reihen ist das **Leibniz-Kriterium**:
Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge nicht-negativer reeller Zahlen.
Dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

konvergent.

Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2})$

Lösungshinweise:

(i) Diese Reihe konvergiert nicht. Die notwendige Voraussetzung, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, ist nicht erfüllt.

(ii) Diese Reihe konvergiert nach dem Kriterium von Leibniz, da $a_k = \frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Gemischtes zur Konvergenz und absoluten Konvergenz) (3+2+1 Punkte)

(a) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz sowie absolute Konvergenz.

 (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{n^2}$,

 (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1/\sqrt{n})$,

 (iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{\sqrt{k!}}$.

(b) Untersuchen Sie folgenden Reihen in Abhängigkeit von $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ auf Konvergenz.

 (i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha^n}$, $(\alpha\geq 0)$,

 (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta+\frac{1}{n}\right)^n$, $(\beta\in\mathbb{R})$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert folgender Reihe.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}.$$

Lösungshinweise:

(a) (i) Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+1$. Wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+1\neq 0$ divergiert die Reihe.

 (ii) Die Folge $(a_n) = (1/\sqrt{n})$ ist offensichtlich eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe daher konvergent. Sie ist aber nicht absolut konvergent, da $1/\sqrt{n}\geq 1/n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Nach dem Minorantenkriterium (Kontraposition des Majorantenkriteriums) ist die Reihe nicht absolut konvergent.

(iii) Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\frac{2^{k+1}}{\sqrt{(k+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{k!}}{2^k} \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Also konvergiert die Reihe.

(b) (i) 1.Fall: $\alpha > 1$. Dann gilt $0 < 1/(1+\alpha^n) < 1/\alpha^n$, und da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\alpha^n$ konvergent ist, folgt mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(1+\alpha^n)$.
2.Fall: $\alpha \leq 1$. Dann gilt $1/(1+\alpha^n) \geq 1/2$. Es liegt also keine Nullfolge vor und die Reihe ist damit nicht konvergent.

(ii) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \beta + \frac{1}{n} \to \beta$$

Wir haben also absolute Konvergenz für $|\beta| < 1$ und Divergenz für $|\beta| > 1$. Für $\beta = 1$ und $\beta = -1$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, daher ist die Reihe nicht konvergent für $\beta = \pm 1$.

(c) Diese Reihe kann leicht in eine geometrische Reihe umgewandelt werden:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 3\Big(-1 - \frac{1}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n\Big) = 3\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe H2 (Majorantenkriterium) (2 Punkte)

Beweisen Sie das Majorantenkriterium (Satz V.2.5).

Lösungshinweise: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_k| \leq |a_k|$ für alle $k \geq n_0$. Wir wollen zeigen, dass dann $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ebenfalls absolut konvergiert.
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, daher konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ nach Definition V.2.3. Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium (Satz V.2.1) existiert zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \Big| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \Big| < \varepsilon$$

für alle $n \geq m \geq N$.
Nach Voraussetzung folgt

$$\sum_{k=m+1}^{n} |b_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

für alle $n \geq m \geq \max\{N, n_0\}$.
Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ebenfalls absolut.

Aufgabe H3 (Integralkriterium) (2 Punkte)

Finden Sie eine stetige Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, so dass $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \infty$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$. Widerspricht dies dem Integralkriterium (Satz V.2.15)?

Lösungshinweise: Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert mit $f(x) = |\sin(\pi x)|$. Dann ist $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 0$. Auf der anderen Seite gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ dass

$$\int_1^N |\sin(\pi x)|\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} |\sin(\pi x)|\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_2^3 \sin(\pi x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{-1}{\pi} \cos(\pi x)\Big|_2^3$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2}{\pi} = \frac{2(N-1)}{\pi} \longrightarrow \infty.$$

Also ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergent.
Dies widerspricht allerdings nicht dem Integralkriterium, da die Funktion nicht monoton fallend ist.