Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
12./13. Januar 2010

11. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Integration)

(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx$

(b) $\int_1^2 (3-2x)^9 dx$.

(ii) Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ an.

$$f(x) = 6x^2 + 3x - 5\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,.$$

Lösungshinweise:

(i) (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \arctan \frac{\pi}{4} \approx 0.66577$.

(b) Man substituiert $y = 3-2x$, also $\frac{dy}{dx} = -2\,(dx = -\frac{1}{2}dy)$. Die neuen Grenzen berechnen sich zu $y_u = 3 - 2\cdot 1 = 1$ und $y_o = 3 - 2 \cdot 2 = -1$ (Achtung: die neue Untergrenze ist größer als die neue Obergrenze!). Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)dx &= \int_1^{-1} y^9 \cdot (-\frac{1}{2})dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 y^9 dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}x^{10}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{20} - \frac{1}{20} = 0.\end{aligned}$$

(ii) Für eine Stammfunktion F von f muss gelten $F'(x) = f(x)$. Man erhält sie durch integrieren der einzelnen Summanden der Funktion f. Ein mögliches Beispiel für eine Stammfunktion F wäre

$$F(x) = 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5\ln x - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

Weitere Stammfunktionen bekommt man, indem man eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ zur Funktion F addiert.

Aufgabe G2 (Integration)

(i) Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_0^\infty e^{-2x}\cos(x)\,dx\,.$$

(ii) Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\,.$$

Bestimmen Sie Koeffizienten A, B, $C \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$f(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}. \qquad (*)$$

Benutzen Sie nun die Darstellung aus $(*)$, um das Integral

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx$$

zu berechnen.

Anmerkung: Die Methode, welche zur Darstellung $(*)$ führt, heißt *Partialbruchzerlegung.*

Lösungshinweise:

(i) Das Integral lässt sich mit partieller Integration lösen. Man setzt

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos x \qquad & u'(x) &= -\sin x \\ v'(x) &= e^{-2x} \qquad & v(x) &= -\tfrac{1}{2}e^{-2x} \end{aligned}$$

und erhält

$$\int_0^\infty e^{-2x}\cos x dx = -\tfrac{1}{2}e^{-2x}\cos x\Big|_0^\infty - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}\sin x.$$

Nochmaliges Anwenden partieller Integration mit

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x \qquad & u'(x) &= \cos x \\ v'(x) &= e^{-2x} \qquad & v(x) &= -\tfrac{1}{2}e^{-2x} \end{aligned}$$

führt zu

$$\int_0^\infty e^{-2x}\cos x dx = -\tfrac{1}{2}e^{-2x}\cos x\Big|_0^\infty + \tfrac{1}{4}e^{-2x}\sin x\Big|_0^\infty - \tfrac{1}{4}\int_0^\infty e^{-2x}\cos x dx\,.$$

Und somit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-2x}\cos x dx &= \tfrac{4}{5}\Big[-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\cos x\Big|_0^\infty + \tfrac{1}{4}e^{-2x}\sin x\Big|_0^\infty\Big] \\ &= \tfrac{4}{5}\Big[-\tfrac{1}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-2b}\cos b + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\lim_{b\to\infty} e^{-2b}\sin b - 0\Big] \\ &= \frac{2}{5}\,. \end{aligned}$$

(ii) Es soll gelten

$$\tfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \tfrac{A}{(x-1)} + \tfrac{B}{(x-2)} + \tfrac{C}{(x-2)^2}.$$

Multiplikation mit $(x-1)(x-2)^2$ ergibt

$$\begin{aligned} x &= A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1) \\ &= x^2(A+B) + x(-4A-3B+C) + (4A+2B-C) \end{aligned}$$

und man erhält durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= -4A - 3B + C \\ 0 &= 4A + 2B - C \end{aligned}$$

mit den Lösungen $A = 1$, $B = -1$ und $C = 2$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} \tfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \int_{-1}^{0} \tfrac{1}{x-1}dx + \int_{-1}^{0} \tfrac{-1}{x-2}dx + \int_{-1}^{0} \tfrac{2}{(x-2)^2}dx \\ &= \ln -x+1\big|_{-1}^{0} - \ln -x+2\big|_{-1}^{0} - 2\tfrac{1}{x-2}\big|_{-1}^{0} \\ &= -2\ln 2 + \ln 3 + \tfrac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Uneigentliche Integrale)

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

existiert.

Lösungshinweise: Da e^{-x^2} auf dem abgeschlossenen Intervall $[1, -1]$ stetig ist, existiert das Integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx$. Da $e^x > 1$ für $x \geq 1$ gilt, $|e^{-x^2}| = |\frac{1}{e^x \cdot e^x}| < e^{-x}$. Wir berechnen

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_{x=1}^{x=\infty} = 0 - (-1/e) = 1/e\,,$$

insbesondere existiert also dieses Integral. Somit folgt aus Satz IV.3.3 die Existenz von $\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx$. Da e^{-x^2} symmetrisch zur y-Achse ist, existiert auch $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\, dx$ und es existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\, dx + \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Aufgabe G4 (Integration)

Überprüfen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Integrale und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $\displaystyle\int_0^2 \tfrac{1}{x^2}dx$ (ii) $\displaystyle\int_2^\infty \tfrac{1}{x^2}dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-\alpha x}dx,\ \alpha > 0$

Lösungshinweise:

(i)

$$\int_0^2 \tfrac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^2 \tfrac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to 0^+} \Big[-1\cdot\frac{1}{x}\Big]_a^2 = \lim_{a\to 0^+} -\frac{1}{2} + \frac{1}{a}$$

Bildet man den Grenzwert $a \to 0^+$, so folgt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^2 \frac{1}{x^2}dx$ divergent ist.

(ii)

$$\int_2^\infty \tfrac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \tfrac{1}{x^2}dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_2^a = \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(iii) Das Integral lässt sich mit partieller Integration lösen. Man setzt

$$\begin{aligned} u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^{-\alpha x} & v(x) &= -\tfrac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

und erhält

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha x} x dx &= \Big[-\tfrac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \cdot x \Big]_0^\infty + \tfrac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \\ &= \Big[-\tfrac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \cdot x \Big]_0^\infty + \tfrac{1}{\alpha} \Big[-\tfrac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big]_0^\infty \\ &= \lim_{b \to \infty} -\tfrac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha b} \cdot b - \tfrac{1}{\alpha^2} \lim_{b \to \infty} e^{-\alpha b} + \tfrac{1}{\alpha^2} \\ &= \tfrac{1}{\alpha^2}\,. \end{aligned}$$

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Riemann-Summen) (3 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \exp(x)$ sei gegeben. Berechnen Sie für die Zerlegung

$$Z = \{j/n,\ j \in \{0, ..., n\}\}$$

des Intervalls $[0,1]$ die Untersumme $\underline{S}(Z)$ und die Obersumme $\overline{S}(Z)$. Welche Grenzwerte haben die Summen für $n \to \infty$? Was folgt für das Integral $\int_0^1 \exp(x)\, dx$?

Hinweise: $\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$. Siehe außerdem Übung 7, G2 (endl. geometrische Reihe).

Lösungshinweise: Für die Untersummen ergibt sich

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{j-1}{n}} \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{j-1}{n}} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^j \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} \qquad \text{(endl. geom. Reihe)} \\ &= \frac{\left(e^1 - 1\right)}{n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)} \to e - 1\,. \qquad \text{(siehe Hinweis)} \end{aligned}$$

In analoger Weise berechnen sich die Obersummen zu

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{j}{n}} \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n} \right) \\ &= e^{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{j-1}{n}} \frac{1}{n} \\ &= e^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(e^1\right)}{1 - e^{\frac{1}{n}}} \to e - 1\,. \end{aligned}$$

Der gemeinsame Grenzwert von Obersumme und Untersumme für $n \to \infty$ ist also

$$\int_0^1 e^x \, dx = e^1 - e^0 = e - 1 \, .$$

Aufgabe H2 (Integrale) (1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1} \, dx, \ \text{(ii)} \int_0^\pi e^{\sin x} \cos x \, dx, \ \text{(iii)} \int_{-1}^1 \cos^2(x) dx, \ \text{(iv)} \int_2^{e^2} \frac{dx}{x \log x}.$$

Hinweis: Das Integral (iv) lässt sich am einfachsten durch raten bestimmen.

Lösungshinweise:

(i) Substitutionsregel:

$$\int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{(x^3+2x+1)'}{x^3+2x+1} dx = 2 \cdot \int_1^4 \frac{1}{t} dt = 2 \cdot [\ln(t)]_1^4 = 2\ln(4).$$

(ii) Substitutionsregel:

$$\int_0^\pi e^{\sin x} \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{\sin x} \cos x \, dx$$

$$= \int_0^1 e^t \, dt + \int_1^0 e^t \, dt = \int_0^1 e^t \, dt - \int_0^1 e^t \, dt = 0$$

(iii) Partielle Integration

$$\int_{-1}^1 \cos^2(x) \, dx = \int_{-1}^1 \cos(x)\cos(x) \, dx = [\sin(x)\cos(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \sin^2(x) \, dx$$

$$= [\sin(x)\cos(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 1 dx - \int_{-1}^1 \cos^2(x) \, dx.$$

Daraus folgt $\int_{-1}^1 \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{2}([\sin(x)\cos(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 1dx) = \sin(1)\cos(1) + 1.$

(iv) Da die Ableitung von $\ln\ln(x)$ gleich $\frac{1}{x \ln x}$ ist, gilt

$$\int_2^{e^2} \frac{dx}{x \log x} = [\ln\ln(t)]_2^{e^2} = \ln(2) - \ln\ln(2) \, .$$

Aufgabe H3 (Partialbruchzerlegung) ($1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x-6} \, dx,$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} \, dx.$

Lösungshinweise:

(i) Die Nullstellen von $q(x) = x^2 + x - 6$ sind 2 und -3. Also lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-2}.$$

Das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2 \\ -2A_1 + 3A_2 &= 1 \end{aligned}$$

hat die Lösung $A_1 = A_2 = 1$. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= [\ln|x+3| + \ln|x-2|]_{-1}^{1} = \ln(2) - \ln(3)\,. \end{aligned}$$

(ii) Für die Partialbruchzerlegung von $\frac{x}{(x+1)^3}$ ist der Ansatz

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}.$$

erforderlich. Als Gleichungssystem erhält man

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ 2A_1 + A_2 &= 1 \\ A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \end{aligned}$$

und somit $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = -1$. Schließlich:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$