Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
8./9. Dezember 2009

9. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit[1])

(a) Sei $D = [b, d] \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$ mit

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Zeigen Sie, dass f in a differenzierbar ist.

(b) Sei $D = [b, d] \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a und differenzierbar in $D \setminus \{a\}$ mit

$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass f in a differenzierbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz und das Ergebnis aus (a).

(c) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \le 0, \\ x^2 + 4, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

im Punkt $a = 0$. Geben Sie an, welche Voraussetzungen für (a) beziehungsweise (b) f nicht erfüllt, und wo diese jeweils im Beweis von (a) beziehungsweise (b) benutzt werden.

Lösungshinweise:

(a) Sei $c := \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Wir betrachten die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{falls } x \neq a, \\ c, & \text{falls } x = a\,. \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist $\lim_{x \to a^-} g(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = g(a)$. Somit ist g in a stetig, das heißt

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert und ist gleich c. Nach Definition ist f also differenzierbar in a.

[1] Motivert durch eine Diskussion im Forum: `http://www.d120.de/forum/viewtopic.php?f=154&t=17593`.

(b) Sei $c := \lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$ und $x \in [b, a[$. Die Funktion f ist auf $[x, a]$ stetig und auf $]x, a[$ differenzierbar. Somit existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\alpha(x) \in]x, a[$ mit

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\alpha(x)).$$

Wir bilden nun den Grenzwert für $x \to a^-$ bei diesem Ausdruck. Dabei ist zu beachten, dass mit $x \to a^-$ wegen $\alpha(x) \in]x, a[$ auch $\alpha(x) \to a^-$ gilt. Wir bekommen also $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$. Analoge Argumentation für $x \in]a, d]$ liefert $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$. Somit folgt aus (a) die Behauptung.

(c) Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

existiert für das gegebene f nicht, denn es gilt $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2+4-0}{x} = x + \frac{4}{x}$, was offensichtlich für $x \to 0^+$ divergiert. (Es ist selbstverständlich nach Definition $f(0) = 0$, keinesfalls darf $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$ benutzt werden, denn f ist ja nicht stetig!) Es ist klar, dass die Existenz des Grenzwertes im Beweis von (a) benutzt wurde.

Betrachten wir nun die Aussage in (b). Offensichtlich erfüllt f die Voraussetzung der Stetigkeit in a nicht. Diese wird im Beweis benutzt, da für den Mittelwertsatz notwendig ist, dass $f : [x, a] \to \mathbb{R}$ nicht nur auf $]x, a[$ differenzierbar, sondern auch auf ganz $[x, a]$ stetig ist.

Aufgabe G2 (Differenzieren)

Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion f, prüfen Sie auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f(x) = |x^3|$,

(b) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{\tan|x|}$.

Lösungshinweise:

(a) Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$. Die einzige Problematik hinsichtlich der Differenzierbarkeit ist die Stelle $x = 0$. Dort gilt $\lim_{x\to 0-} \frac{-x^3-0}{x-0} = \lim_{x\to 0-} -x^2 = 0 = \lim_{x\to 0+} x^2 = \lim_{x\to 0+} \frac{x^3-0}{x-0}$, also ist f in 0 differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$. Ansonsten gilt $f'(x) = 3x^2$, falls $x > 0$, und $f'(x) = -3x^2$, falls $x < 0$. Alternativ kann auch G1(b) benutzt werden.

(b) Der maximale Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Es gilt $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{7}{8}}$, damit ist die Funktion auf $D \setminus \{0\}$ differenzierbar, da sie eine Potenzfunktion ist (alternativ: Verknüpfung von differenzierbaren Funktionen) mit $f'(x) = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$. Die Funktion ist aber nicht differenzierbar, da sie in 0 nicht differenzierbar ist, dennn es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{7}{8}}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^{-\frac{1}{8}}$, was offensichtlich nicht existiert.

(c) Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (Korrekt wäre es auch, $\mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ als maximalen Definitionsbereich anzugeben, da $\tan x$ ohne das Umformen zu $\frac{\sin x}{\cos x}$ für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nicht definiert ist.), die Funktion f ist als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen differenzierbar, denn es gilt $f(x) = \frac{\cos|x|}{\sin|x|}$, also $f'(x) = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-1}{(\sin x)^2}$, falls $x > 0$, und $f'(x) = \frac{-\sin(-x)(-1)\sin(-x) - \cos(-x)\cos(-x)(-1)}{(\sin(-x))^2} = \frac{1}{(\sin(-x))^2} = \frac{1}{(\sin x)^2}$, falls $x < 0$.

Aufgabe G3 (Ermittlung von Extremstellen)
Wir betrachten die Funktion $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3\,.$$

(a) Wie lautet die Gleichung der Tangenten an der Stelle $x_0 = 1$?

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen.

(c) Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum.

Lösungshinweise:

(a) Wir bestimmen zunächst die erste Ableitung.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Für die Gleichung der Tangenten $t(x) = mx + c$ ergibt sich daraus $m = f'(1) = 3 - 6 = -3$, also

$$t(x) = -3x + c\,.$$

Da außerdem $t(1) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 = 1$ gelten muss, folgt

$$t(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 + c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4.$$

Also lautet die Tangentengleichung an der Stelle $x_0 = 1$

$$t(x) = -3x + 4.$$

(b) Für die lokalen Extremstellen in Inneren von $D(f)$ setzen wir die erste Ableitung gleich Null:

$$3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x - 2) = 0\,.$$

Daraus liest man die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ ab. Nur $x_1 = 0$ liegt im Inneren des Definitionsbereich. $x_2 = 2$ kommt durch die Randbetrachtung ebenso wie $x_\ell = -1$ (ℓ für links) ohnehin als lokale Extremstelle ins Spiel. Also sind -1, 0 und 2 lokale Extremstellen.

(c) Wir überprüfen die lokalen Extremstellen und finden:

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 3, \quad f(2) = -1.$$

Daraus schließen wir, dass das globale Maximum 3 lautet (mit der zugehörigen globalen Maximalstelle 0). Außerdem ist -1 das globale Minimum, das sogar an zwei Stellen (nämlich -1 und 2) angenommen wird.
Alternativ: Die zweite Ableitung lautet $f''(x) = 6x - 6$. Für den inneren Punkt $x_1 = 0$ bekommen wir daher $f''(0) = -6 < 0$. Nach Satz III.2.8 ist $x_1 = 0$ daher ein lokales Maximum. Die Ränder untersuchen wir seperat und erhalten

$$f(-1) \leq f(x) \quad \forall x \in [-1, 2]$$

$$f(2) \leq f(x) \quad \forall x \in [-1, 2]$$

Daher sind $x_l = -1$ und $x_2 = 2$ lokale und auch globale Minima mit $f(x_l) = f(x_2)$. Da x_1 einziges lokales Maximum ist, ist x_1 ebenfalls globales Maximum.

Aufgabe G4 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)

Gegeben sei die Funktion $f : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \sin x$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend und stetig ist.

(c) Berechnen Sie $\left(f^{-1}\right)'(\pi\sqrt{2}/8)$.

Lösungshinweise: Es gilt $f'(x) = x\cos x + \sin x > 0$ auf $(0, \pi/4)$. Daher existiert die Umkehrfunktion f^{-1} nach Satz III.3.1. Nach diesem Satz ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig auf $B(f) = [0, \pi\sqrt{2}/8]$. Da $f'(x) > 0$ ist auch $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} > 0$ und nach Satz III.2.5 streng monoton wachsend. Damit sind die Aussagen (a) und (b) bewiesen.
Ebenfalls aus Satz III.3.1 erhalten wir, dass f^{-1} differenzierbar auf $[0, \pi\sqrt{2}/8]$ ist und

$$\left(f^{-1}\right)'(\pi\sqrt{2}/8) = \frac{1}{f'}\Big|_{\pi/4 = f^{-1}(\pi\sqrt{2}/8)} = \frac{1}{\sin\pi/4 + \pi/4\cos\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{(1+\pi/4)}$$

gilt.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Extremwerte) ($\frac{1}{2} + 1 + 2$ Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1,$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos^2(x)$$

und

$$h : (-10, 10) \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}, & \text{falls } x \in (-10, 1) \\ x^2 - 2x + 1, & \text{falls } x \in [1, 10) \end{cases}.$$

Lösungshinweise: Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = 1 \leq 1 = f(x_0) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und

$$f(x) = 1 \geq 1 = f(x_0) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Folglich besitzt die Funktion f an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ sowohl ein globales und lokales Maximum als auch ein globales und lokales Minimum.
Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Nach der Kettenregel lautet die erste Ableitung

$$g'(x) = -2\sin(x)\cos(x).$$

Die Ableitung besitzt die Nullstellen $x_k = \frac{\pi}{2}k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Die zweite Ableitung lautet

$$g''(x) = 2(\sin^2(x) - \cos^2(x)).$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$g''(x_{2n}) = 2(\underbrace{\sin^2(\pi n)}_{=0} - \underbrace{\cos^2(\pi n)}_{=1}) = -2 < 0$$

und

$$g''(x_{2n+1}) = 2(\underbrace{\sin^2(\pi n + \frac{\pi}{2})}_{=1} - \underbrace{\cos^2(\pi n + \frac{\pi}{2})}_{=0}) = 2 > 0.$$

Daher besitzt g an den Stellen x_{2n} ($n \in \mathbb{Z}$) lokale Maxima und an den Stellen x_{2n+1} ($n \in \mathbb{Z}$) lokale Minima. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \geq \cos^2(x) \geq 1.$$

Außerdem ist

$$g(x_{2n}) = \cos^2(\pi n) = 1$$

und

$$g(x_{2n+1}) = \cos^2(\pi n + \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Folglich sind alle lokalen Extrema auch globale.
Für $x \neq 1$ ist die Funktion h offensichtlich beliebig oft differenzierbar. An der Stelle 1 kann man durch das Betrachten des rechts- und linksseitigen Grenzwertes und der links- und -rechtsseitigen Ableitung leicht einsehen, dass h auch dort differenzierbar ist. Die Ableitung lautet

$$h'(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{falls } x \in (-10, 1) \\ 2x - 2, & \text{falls } x \in [1, 10) \end{cases}.$$

Die Nullstellen von h sind $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. An der Stelle x_0 ist h zweimal differenzierbar und es gilt

$$h''(x_0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 < 0.$$

Daher besitzt h an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.
An der Stelle x_1 ist h *nicht* zweimal differenzierbar. Daher betrachte man das Vorzeichen der Ableitung in der Nähe von x_1, um zu entscheiden, ob eine Extremum vorliegt.
Im Intervall $(0, 1)$ ist h' negativ und im Intervall (1,10) positiv. Daher ist an der Stelle x_1 ein lokales Minimum.
Weiter gilt

$$\lim_{x \to -10} h(x) = -\frac{1000}{3} - \frac{100}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{2299}{6}$$

und

$$\lim_{x \to 10} h(x) = 100 - 20 + 1 = 81.$$

Da $h(0) = \frac{1}{6} < 81$ gilt, befindet sich an der Stelle 0 kein globales Maximum. Da $h(1) = 0 > -\frac{2299}{6}$ gilt, befindet sich an der Stelle 1 kein globales Minimum.
Weil -10 und 10 nicht zum Definitionsbereich gehören, besitzt die Funktion h weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum.

Aufgabe H2 (Erweiterter Mittelwertsatz) (4 Punkte)
Sei $D = [a, b]$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar, und sei $g(a) \neq g(b)$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass ein $c \in]a, b[$ existiert, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$

und gehen Sie ähnlich vor wie im Beweis des Mittelwertsatzes.

Lösungshinweise: Da $h(a) = h(b)$ (nachrechnen!), besitzt die Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ (mindestens) ein lokales Extremum bei einem $c \in]a, b[$. Da h als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $]a, b[$ differenzierbar ist, gilt nach Satz III.2.2, dass $h'(c) = 0$. Umformen ergibt die gewünschte Behauptung.

Aufgabe H3 (Umkehrfunktion) ($2\frac{1}{2}$ Punkte)

Sei $D = [0, \frac{\pi}{3}]$. Wir betrachten die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{3}x^2 \sin(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt.

(b) Überlegen Sie, warum f^{-1} stetig und streng monoton wachsend ist.

(c) Welchen Funktionswert hat f an der Stelle $\frac{\pi}{3}$? Geben Sie den Definitionsbereich $D(f^{-1})$ der Umkehrfunktion f^{-1} an!

(d) Welchen Wert hat die Ableitung von f^{-1} an der Stelle $\frac{\pi^2}{6}$?

Lösungshinweise:

(a) Die Existenz der Umkehrfunktion folgt aus $f'(x) = \sqrt{3}x^2 \cos x + 2\sqrt{3}x \sin x > 0$ auf $(0, \frac{\pi}{3})$ mit Satz III.3.1.

(b) Die Stetigkeit folgt ebenfalls aus Satz III.3.1. Außerdem ist mit $f'(x) > 0$ auch $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} > 0$ und somit f^{-1} nach Satz III.2.5 streng monoton wachsend (vgl. Gruppenübung).

(c) Es ist $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi^2}{6}$ und $f(0) = 0$, also $D(f^{-1}) = [0, \frac{\pi^2}{6}]$.

(d) Es ergibt sich

$$(f^{-1})'(\frac{\pi^2}{6}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{\pi^2}{6}))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{\pi + \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}}.$$

Man beachte $f^{-1}(\frac{\pi^2}{6}) = \frac{\pi}{3}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.