**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
01./02. Dezember 2009

# 8. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Wiederholung zur Stetigkeit)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Jede stetig differenzierbare Funktion ist differenzierbar.
- ☐ Jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
- ☐ Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig.
- ☐ Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- ☐ Ist eine Funktion nicht stetig, so ist sie auch nicht differenzierbar.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Funktionen stetig sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

$$\text{(i)}\quad f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\sqrt{2}x^4-25.37+\frac{3x+2-x^2}{2x^3}\cdot\sqrt{x}$$

$$\text{(ii)}\quad h:(-13,11)\to\mathbb{R},\quad h(x)=\begin{cases} x-1 & x<1\\ \frac{3}{2}(x-1) & 1\le x\le 3\\ (\tan\left(\frac{\pi}{3}\right))^2 & x>3.\end{cases}$$

**Lösungshinweise:**

(a) Die erste Aussage ist wahr. Die zweite Aussage ist falsch. Die dritte Aussage ist richtig. Die vierte Aussage ist falsch. Die letzte Aussage ist wahr (Jede differenzierbare Funktion ist stetig.)

(b) (i) Die Funktion $f$ ist stetig, da $\sqrt{\cdot}$, Polynome, rationale Funktionen und konstante Funktionen stetig sind, und die Verknüpfung stetiger Funktionen wiederum stetig ist.

(ii) Für $x<1$, $x\in(1,3)$, $x>3$ ist die Funktion $h$ stetig, da sie entweder konstant oder ein Polynom ersten Grades ist.
Für $x=1$ betrachten wir zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}x_n=1$, $x_n<1$, $\forall n$ bzw. $\lim_{n\to\infty}y_n=1$, $y_n>1$, $\forall n$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}h(x_n)=1-1=0\qquad\text{und}\qquad\lim_{n\to\infty}h(y_n)=\frac{3}{2}(1-1)=0.$$

Die Funktion $h$ ist also auch im Punkt 1 stetig.
Für $x=3$ betrachten wir zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}x_n=3$, $x_n<3$, $\forall n$ bzw. $\lim_{n\to\infty}y_n=3$, $y_n>3$, $\forall n$. Somit

$$\lim_{n\to\infty}h(x_n)=\frac{3}{2}(3-1)=3\qquad\text{und}\qquad\lim_{n\to\infty}h(y_n)=(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right))^2=3.$$

Die Funktion $h$ ist also auch stetig.

**Aufgabe G2** (Differenzieren üben)

Geben Sie für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D(f_i) \subset \mathbb{R}$, auf dem sie definiert werden können, sowie die erste Ableitung an.

(a) $f_1(x) = 3x(2x+7)^8$,

(b) $f_2(x) = \cos(x^3)$,

(c) $f_3(x) = \frac{x^2}{\cos x}$,

(d) $f_4(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k x - c_k)^k$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_k, c_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

(e) $f_5(x) = \sqrt{x}\big(3x - 6x^3\big)$,

(f) $f_6(x) = \tan^3(5x)$,

(g) $f_7(x) = \frac{\cos(\sin(x))}{\sin(\sin(x))}$,

**Lösungshinweise:**

(a) $D(f_1) = \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 3(2x+7)^8 + 48x(2x+7)^7$

(b) $D(f_2) = \mathbb{R}$, $f_2'(x) = -3x^2\sin(x^3)$

(c) $D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $f_3'(x) = \frac{2x\cos(x)+x^2\sin(x)}{\cos^2(x)}$

(d) $D(f_4) = \mathbb{R}$, $f_4'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot b_k \cdot a_k(b_k x - c_k)^{k-1}$

(e) $D(f_5) = \mathbb{R}$, $f_5'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}(9 - 42x^2)$

(f) $D(f_6) = \mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $f_6'(x) = 15\tan^2(5x)/\cos^2(5x)$

(g) $D(f_7) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,

$$f_7'(x) = \frac{\sin(\sin x)(-\sin(\sin x))\cos x - \cos(\sin x)\cos(\sin x)\cos x}{\sin^2(\sin x)} = -\cos(x)/(\sin^2(\sin(x)))$$

(Da $\sin^2(\sin x) + \cos^2(\sin x) = 1$.)

**Aufgabe G3** (Differenzierbarkeit)

Wie oft ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

*Tipp:* Berechnen Sie die erste Ableitung und überprüfen Sie diese auf Stetigkeit.

**Lösungshinweise:** Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ berechnet man die Ableitung mit Ketten - und Produktregel:

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für die Ableitung im Punkt $x = 0$ schaut man sich den Differentialquotienten an:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Da gilt

$$-x \leq x\sin(\frac{1}{x}) \leq x$$

für $x > 0$ und

$$x \leq x\sin(\frac{1}{x}) \leq -x$$

für $x < 0$, folgt mit Satz II.3.6

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0.$$

Also ist $f$ einmal differenzierbar und die erste Ableitung lautet

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Die erste Ableitung ist jedoch unstetig im Punkt $x = 0$, denn $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ geht für $x \to 0$ gegen 0, aber $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ besitzt für $x \to 0$ keinen Grenzwert (oszilliert zwischen -1 und 1). Etwas genauer: Wir betrachten die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = \frac{1}{2\pi k}$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ und

$$\lim_{k\to\infty} f'(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi k}\sin(2\pi k) - \cos(2\pi k) = \lim_{k\to\infty}(-1) = -1 \neq f'(0).$$

Also ist $f'$ nicht stetig in 0 und daher auch nicht differenzierbar (vgl. Satz III.1.5). Die Funktion $f$ ist also genau einmal differenzierbar.

**Aufgabe G4** (Additionstheoreme)
Zeigen Sie durch Differentiation nach $x$, dass aus dem Additionstheorem

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

das Additionstheorem für $\sin(x+y)$ folgt.

**Lösungshinweise:** Indem wir beide Seiten des Additiontheorems nach $x$ differenzieren, erhalten wir

$$-\sin(x+y) = -\sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)\,.$$

## Hausübung

**(In der nächsten Übung abzugeben.)**

**Aufgabe H1** (Differenzierbarkeit) ($1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Punkte)
Untersuchen Sie die Funktionen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x|$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x|$

auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Ableitung.

**Lösungshinweise:**

(a) Für $x > 0$ ist $f(x) = x^2$, also differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 2x$. Für $x < 0$ ist $f(x) = -x^2$ also auch differenzierbar und es gilt $f'(x) = -2x$. Für $x = 0$ gilt ($g$ bezeichnet den Differentialquotienten)

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0+} x = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0-} -x = 0.$$

Also ist $f$ auch in 0 differenzierbar, und es ist $f'(0) = 0$.

(b) Für $x > 0$ ist $f(x) = 0$ und damit differenzierbar mit $f'(x) = 0$. Für $x < 0$ ist $f(x) = 2x$ und damit auch differenzierbar mit $f(x) = 2$. Für $x = 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-x-0}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x+x-0}{x} = 2 \neq 0.$$

Demnach ist die Funktion in 0 nicht differenzierbar.

**Aufgabe H2** (Noch mehr zur Differenzierbarkeit) (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-a)|x-b|.$$

Beweisen Sie, dass $f$ genau dann differenzierbar ist, wenn $a = b$.

**Lösungshinweise:** "$\Rightarrow$" Sei $f$ differenzierbar, insbesondere auch für $x = b$, d.h. der Differentialquotient

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{(x-a)|x-b|-0}{x-b}$$

existiert. Es gilt

$$\lim_{x\to b+} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b+} \frac{(x-a)(x-b)}{x-b} = \lim_{x\to b+} (x-a) = b-a,$$
$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b-} \frac{(x-a)(b-x)}{x-b} = \lim_{x\to b-} (a-x) = a-b,$$

Daraus folgt, dass $b - a = a - b$, also $a = b$.

Alternativer Beweis: Wir nehmen an, dass $f$ differenzierbar ist auf $\mathbb{R}$, aber $a \neq b$. Sei

$$g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}, \; g(x) = \frac{f(x)}{x-a} = |x-b|.$$

Da $f$ sowie die Funktion $x \mapsto x - a$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ sind, folgt, dass $g$ differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ist (Quotientenregel, siehe Satz III.1.9). Da $a \neq b$, ist $g$ differenzierbar in $b$, was ein Widerspruch ist, da die Betragsfunktion in Null nicht differenzierbar ist (siehe Beispiel III.1.2).

"$\Leftarrow$" Wir nehmen an, dass $a = b$. Dann ist $f(x) = (x-a)|x-a|$. Diese Funktion ist offensichtlich differenzierbar für $x > a$ und $x < a$. Für $x = a$ betrachten wir den Differentialquotienten:

$$\lim_{x\to a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)|x-a|-0}{x-a} = \lim_{x\to a} |x-a| = 0.$$

Alternativer Beweis: Wir nehmen an, dass $a = b$. Dann ist $f(x) = (x-a)|x-a| = (g \circ h)(x)$ mit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g(x) = x|x|, \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; h(x) = x - a.$$

$h$ und $g$ (siehe H1) sind differenzierbar. Nach der Kettenregel (Satz III.1.7) ist damit auch $f$ differenzierbar.

**Aufgabe H3** (Mittelwertsatz der Differentialgleichung) ($1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Punkte)

(a) Sei $a < c$ und $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto t^2$. Geben Sie ein $b \in (a, c)$ an mit

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(b)\,.$$

(b) Machen Sie das gleiche für $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{t}$ mit $0 < a < c$.

**Lösungshinweise:**

(a) Die linke Seite der Gleichung lautet:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{c^2 - a^2}{c - a} = \frac{(c - a)(c + a)}{c - a} = c + a\,.$$

Aus $f(t) = t^2$ folgt $f'(t) = 2t$. Das heißt die rechte Seite der Gleichung wird einfach zu $2b$. Wir müssen also die Gleichung $c + a = 2b$ nach $b$ auflösen. Das Ergebnis ist dann $\frac{c+a}{2}$, das arithmetische Mittel der beiden Endpunkte des Definitionsintervalls.

(b) Die linke Seite der Gleichung lautet:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}{c - a} = \frac{\frac{a-c}{ac}}{c - a} = -\frac{1}{ac}.$$

Aus $f(t) = \frac{1}{t}$ folgt $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$. Das heißt die rechte Seite der Gleichung wird somit zu $-\frac{1}{b^2}$. Wir müssen also die Gleichung

$$-\frac{1}{ac} = -\frac{1}{b^2}$$

nach $b$ auflösen, das heißt, wir müssen $b^2 = ac$ nach $b$ auflösen. Da $a$ und $c$ echt größer 0 sind und $b$ zwischen $a$ und $c$ liegen soll, heißt das für $b$, dass $b$ auch positiv ist. Somit gilt $b = \sqrt{ac}$. (Dies nennt man auch das geometrische Mittel von $a$ und $c$.)