Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
24./25. November 2009

7. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Grenzwerte von Funktionen)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte oder weisen Sie deren Nichtexistenz nach:

(a)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^3-4x^2+3x+2},$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty} \sin(2\pi x).$$

Lösungshinweise:

(a) Für $x = 2$ ist sowohl der Zähler als auch der Nenner gleich Null. Mit Hilfe des Hornerschemas oder einer Polynomdivision kann der Bruch gekürzt werden und es folgt:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^3-4x^2+3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-4}{x^2-2x-1} = \frac{2-4}{4-4-1} = 2.$$

(b) Betrachte die Folgen $a_n = n$ und $b_n = n + \frac{1}{4}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim_{n\to\infty} b_n$, aber

$$\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi b_n).$$

Folglich existiert $\lim_{x\to\infty} \sin(2\pi x)$ nicht.

Aufgabe G2 (Geometrische Reihe)
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, und

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (unendliche) *Reihe*. Für diese Reihe schreibt man auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. Die a_k heißen *Glieder* der Reihe, die s_n heißen *Partialsummen*.

Gegeben ist die *geometrische Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$.

(a) Zeigen Sie per Induktion, dass

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{für } q \neq 1\,, \\ n+1 & \text{für } q = 1\,. \end{cases}$$

(b) Beweisen Sie die Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| < 1$ und die Divergenz für $|q| \geq 1$.

Lösungshinweise:

(a) Für $q \neq 1$:
Induktionsanfang: $s_0 = 1 = \frac{q-1}{q-1}$
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle $n < n_0 \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} q^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + \frac{q^{n+1}(q-1)}{q-1} \\ &= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} \\ &= \frac{q^{n+2}-1}{q-1}\,. \end{aligned}$$

Somit gilt die gefundene Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.
Für $q = 1$ ist die Aussage offensichtlich.

(b) Für $|q| < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$.
Für $|q| \geq 1$ divergiert die geometrische Reihe, da
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \geq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q} = \lim\limits_{n\to\infty} q^n - \frac{1}{q} \to \infty$.

Aufgabe G3 (Stetigkeit)

(a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in a ist, wenn $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Wie könnte man f an der Stelle $x_0 = 0$ definieren, sodass die entstehende Funktion $\tilde{f}$ stetig ist?
Hinweis: Die so entstehende Funktion $\tilde{f}$ ist eine stetige Fortsetzung der Funktion

$$\hat{f} = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

im Punkt 0 (vgl. Definition II.3.17).

Lösungshinweise:

(a) Die Funktion f ist genau dann stetig in a, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (vgl. Bemerkung (1) nach Definition II.3.11), das heißt wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Da jede Folge in $D\cap]-\infty, a[$ und $D\cap]a, \infty[$ offensichtlich eine Folge in D ist, ergibt sich $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Gelte nun umgekehrt $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Falls $D\cap]-\infty, a[$ oder $D\cap]a, \infty[$ endlich ist, gilt offensichtlich $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Ist dies nicht der Fall, betrachten wir die Folgen $(x_n)_{x_n\in D\cap]-\infty,a[,n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{x_n\in D\cap]a,\infty[,n\in\mathbb{N}}$. Sei nun $\epsilon > 0$. Wegen $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ existieren $N^+, N^- \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ für alle $x_n \in D\cap]-\infty, a[\cup D\cap]-\infty, a[= D \setminus \{a\}$ und $n \geq N := \max(N^+, N^-)$. Da dies auch für $x_n = a$ offensichtlich ist, folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Wegen $-1 \leq \sin y \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$-x_n^2 \leq x_n^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq x_n^2.$$

Da $\lim_{n\to\infty}(-x_n^2) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 0$ folgt mit dem Einschließungskriterium $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Dies gilt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Wir können daher die Funktion $\tilde{f}$ wie folgt definieren:

$$\tilde{f} = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nun stetig.

Aufgabe G4 (Häufungspunkte)

Bestimmen Sie für die untenstehenden Folgen alle Grenzwerte (sofern sie existieren) und alle Häufungspunkte der Mengen $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(d) $a_n = n^{(-1)^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise:

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Damit ist 0 Häufungspunkt der Menge

$$M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\},$$

denn $0 \notin M$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und n gerade gilt $a_n = 1$; für $n \in \mathbb{N}$ und n ungerade gilt $a_n = -1$. Daraus schließen wir, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert besitzt. Die Menge

$$M = \{-1, 1\}$$

besitzt auch keine Häufungspunkte. Wäre nämlich 1 ein Häufungspunkt, dann müssten wir eine Folge in $M \setminus \{1\} = \{-1\}$ finden, die gegen 1 konvergiert. Dies ist offensichtlich nicht möglich. Mit der gleichen Argumentation ist auch -1 kein Häufungspunkt.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ und n gerade gilt $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, d.h. $\lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{2k}) = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ und n ungerade gilt jedoch $a_n = -1 + \frac{1}{n}$, d.h. $\lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{2k+1}) = -1$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen Grenzwert. Die Menge

$$M = \left\{0, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, -1 + \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

besitzt jedoch 2 Häufungspunkte: -1 und 1. Es gilt nämlich $-1 \notin M$ und $1 \notin M$ sowie

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad x_k = 1 + \frac{1}{2k} \text{ ist eine Folge in } M \text{ mit } \lim_{k\to\infty} x_k = 1 \text{ und}$$
$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad x_k = -1 + \frac{1}{2k+1} \text{ ist ein Folge in } M \text{ mit } \lim_{k\to\infty} x_k = -1\,.$$

(d) Für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = n$ und für ungerade $n \in \mathbb{N}: \ a_n = n^{-1} = \frac{1}{n}$. Die Menge

$$M = \{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots\}$$

hat somit den Häufungspunkt 0, denn $0 \notin M$ und

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad x_k = \frac{1}{2k+1}$$

konvergiert gegen 0. Es konvergiert jedoch nur eine Teilfolge gegen 0, der Grenzwert von a_n existiert somit nicht.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Polynome als stetige Funktionen) (1+1+1 Punkte)

Gegeben sei das Polynom P mit

$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2$$

und das abgeschlossene Intervall $I = [-2, 2]$.

(a) i. Ist P stetig auf I?
 ii. Ist P auf I beschränkt?
 iii. Besitzt P auf I ein Maximum bzw. ein Minimum?

(b) Berechnen Sie $P(-2)$ und $P(2)$ mit dem Hornerschema.

(c) i. Zeigen Sie, dass P in $[-2, 2]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.
 ii. Begründen Sie, dass die Gleichung $P(x) = -1$ mindestens eine Lösung $x_0 \in [0, 1]$ besitzt.

Lösungshinweise:

(a) i. P ist nach Satz II.3.16 (1) stetig.
 ii. Als stetige Funktion auf einem Intervall ist P beschränkt nach Satz II.3.21.
 iii. Ja, folgt auch aus Satz II.3.21.

(b) Anwendung des Hornerschemas für $x = 2$ liefert

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ - & 2 & 4 & 12 & 22 & 44 \\ \hline & 2 & 6 & 11 & 22 & 42 \end{array}$$

Also ist $P(2) = 42$. Für $x = -2$ ergibt sich

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ - & -2 & 4 & -12 & 26 & -52 \\ \hline & -2 & 6 & -13 & 26 & -54 \end{array}$$

Damit ist $P(-2) = -54$.

(c) i. Wegen $P(-2) < 0$ und $P(2) > 0$ gibt es nach Satz II.3.23 ein $x \in I$ mit $P(x) = 0$.

ii. Man sieht, dass $P(0) = -2$ und $P(2) > 0$ ist. Damit folgt aus Satz II.3.23: Auf dem Intervall $[0, 2]$ werden alle Werte zwischen -2 und 0, also insbesondere der Wert -1, angenommen.

Aufgabe H2 (Stetigkeit und Beschränktheit) ($1 + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.
Zur Erinnerung: für $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ ist für alle $x, y \in D$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig ist.

(c) Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in einem Punkte $x \in D$. Zeigen Sie, dass es ein Intervall $U = (a, b)$ mit $x \in U$ gibt, so dass $f : U \cap D \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Lösungshinweise:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Dann ist für alle $x, y \in D$ mit der Eigenschaft $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < \varepsilon.$$

Also ist f gleichmäßig stetig.

(b) Die Funktion g ist stetig und somit nach Satz II.3.26 auch gleichmäßig stetig.
Angenommen, g wäre Lipschitz-stetig, dann gäbe es eine Konstante $L > 0$ mit der Eigenschaft

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq L|x - 0| \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Hieraus folgt aber, dass $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \leq L$ für alle $x \in [0, 1]$. Widerspruch, denn $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \to 0} \infty$.

(c) Setze $\varepsilon := 1$. Da f in x stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(y) - f(x)| < 1$ für $|x - y| < \delta$. Für $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap D$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|f(y)| = |f(y) - f(x) + f(x)| \leq |f(x)| + |f(y) - f(x)| \leq |f(x)| + 1.$$

Mit $U := (x - \delta, x + \delta)$ ist also f beschränkt auf $U \cap D$.

Aufgabe H3 (Stetigkeit) ($1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Punkte)

(a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D =]\frac{1}{2}, \infty[$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 5 + \tan(\pi x) & x \in]\frac{1}{2}, 1[\\ x^2 + 2x + 2 & x \in [1, 3[\\ \frac{17}{x} & x \in [3, \infty[. \end{cases}$$

Für welche $x \in D$ ist f stetig?

(b) In welchen Punkten ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

stetig?
Hinweis: Skizzieren Sie den Funktionsverlauf.

Lösungshinweise:

(a) Die Funktion f ist auf jedem der Teilintervalle $]\frac{1}{2}, 1[$, $]1, 3[$ bzw. $]3, \infty[$ stetig, da es sich jeweils um stetige Funktionen handelt.
Für $x = 1$ gilt

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (5 + \tan(\pi \cdot x)) = 5,$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2 + 2x + 2) = 5$$

und

$$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 5.$$

Der rechts- und linksseitige Grenzwert stimmen also mit dem Funktionswert an der Stelle $x = 1$ überein, die Funktion f ist auch im Punkt $x = 1$ stetig.
Für $x = 3$ gilt

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} x^2 + 2x + 2 = 17$$

und

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} \frac{17}{x} = \frac{17}{3} \neq 17.$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert stimmen nicht überein, die Funktion f ist im Punkt $x = 3$ also nicht stetig.

(b) Zunächst einmal ist f an den Stellen x mit $x > 1$, $x < 0$ sowie $x \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$, $n = 2, 3, 4 \ldots$, stetig, da sie dort konstant ist.
Es bleibt zu untersuchen, wie das Stetigkeitsverhalten in den Punkten $x = 0, x = \frac{1}{n}, x = 1$ ist. Die Stelle $x = 0$ ist eine Stetigkeitsstelle: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daï¿½$\frac{1}{2}$ für alle $m > n_0$ gilt: $x_m < 1$. Es folgt

$$f(x_m) = \begin{cases} 0 & x_m \leq 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \leq x_m < \frac{1}{n-1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

und somit $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$.
Dagegen sind die Stellen $x = \frac{1}{n}$ und $x = 1$ keine Stetigkeitsstellen. Um dies zu zeigen wählen wir Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \to \infty} x_k = \frac{1}{n}$ und $x_k < \frac{1}{n}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (analog: $\lim_{k \to \infty} x_k = 1$ und $x_k < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$). Dann folgt $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \frac{1}{n+1} \neq f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ (analog: $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \frac{1}{2} \neq f(1) = 1$).