Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
10./11. November 2009

5. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Folgen)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

(c) Es gibt Folgen, die gleichzeitig konvergieren und divergieren.

(d) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.

(e) Jede konvergente Folge hat ein größtes Element.

(f) Jede von oben beschränkte Folge hat ein größtes Element.

(g) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind, dann ist auch $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(h) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Lösungshinweise:

(a) wahr, siehe Satz II.1.5 (2) im Skript.

(b) falsch: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ ist beschränkt da $|a_n| \leq 1$ für alle n, aber nicht konvergent.

(c) falsch: Vergleiche die entsprechenden Definitionen.

(d) falsch: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ ist divergent und beschränkt.

(e) falsch: Die Folge $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, hat aber kein maximales Element.

(f) falsch: Die Folge $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist von oben beschränkt, hat aber kein maximales Element.

(g) wahr, siehe Satz II.1.9 (2) im Skript.

(h) falsch: Betrachte die Folgen mit $a_n := 1$ und $b_n := \frac{1}{n}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G2 (Doppelfolgen)

Zu $n, m \in \mathbb{N}$ sei $a_{n,m} := (1 - \frac{1}{m+1})^{n+1}$. Bestimmen Sie

$$a = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{a} = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{n,m})$$

Hinweis: Um a zu berechnen, berechnen Sie den Grenzwert $a_n := \lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ und dann den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$)

Lösungshinweise: Wie im Hinweis berechnen wir (für festes $n \in \mathbb{N}$)

$$a_n := \lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty} \underbrace{(1 - \frac{1}{m+1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{m+1})}_{n+1 \text{ mal}} = 1^{n+1} = 1$$

und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Andererseits ist für festes $m \in \mathbb{N}$

$$\tilde{a}_m := \lim_{n\to\infty} a_{n,m} = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{1 - \frac{1}{m+1}}_{<1})^n = 0$$

und $\lim_{m\to\infty} \tilde{a}_n = 0$. □

Fazit: Grenzwertprozesse lassen sich nicht einfach vertauschen.

Aufgabe G3 (Cauchyfolgen)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist. (Vergleiche Beweis von Satz II.1.18 im Skript.)

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Cauchyfolge und s_n definiert als das Supremum der Menge $A_n := \{a_m \,|\, m \geq n\}$. Zeigen Sie,

$$\forall \epsilon > 0 \,\exists N \in \mathbb{N} \,\forall n \geq N \; |a_n - s_n| \leq \epsilon\,.$$

(Vergleiche Beweis von Satz II.1.18 im Skript.)

(c) Sei $b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k}$ und $m \geq n$ mit $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $|b_m - b_n| \leq \frac{1}{n-1}$ falls $n - m$ gerade ist. (Vergleiche Beispiel II.1.19 im Skript).

Lösungshinweise:

(a) Da (a_n) eine Cauchyfolge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geq N$ $|a_n - a_m| \leq 1$. Die Menge $B := \{a_n \,|\, n \leq N\}$ ist endlich und somit beschränkt, das heißt, es existiert ein $M \in \mathbb{R}$, sodass $|a_n| \leq M$ für alle $n \leq N$. Sei nun $n, m \geq N$. Dann gilt $|a_m| = |a_m - a_N + a_N| \leq |a_m - a_N| + |a_N| \leq 1 + M$, da $a_N \in B$. Somit ist $|a| \leq M + 1$ für alle $a \in A$, also ist A beschränkt. □

(b) Sei $\epsilon > 0$. Da a_n eine Cauchyfolge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| \leq \epsilon$. Somit gilt für jedes $m \geq n \geq N$, dass

$$a_m = a_m - a_n + a_n \leq |a_m - a_n| + a_n \leq \epsilon + a_n\,;$$

das heißt, $a_n + \epsilon$ ist ein obere Schranke von A_n. Da s_n die kleinste obere Schranke von A_n ist, gilt also $s_n \leq a_n + \epsilon$, also $s_n - a_n = |a_n - s_n| \leq \epsilon$. □

(c) Wie in Beispiel II.1.19 im Skript gilt $|b_m - b_n| = \sum_{k=1}^{m-n} \frac{(-1)^{k+1}}{n+k}$. Daraus folgt, dass

$$|b_m - b_n| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n+1}\,,$$

da die Ausdrücke in den Klammern jeweils positiv sind. □

Aufgabe G4 (Konvergenz von Folgen)

Sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^k}{2^n}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ streng monoton fallend ist.

Lösungshinweise: Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$a_n \geq a_{n+1} \Longleftrightarrow \frac{n^k}{2^n} \geq \frac{(n+1)^k}{2^{n+1}} \Longleftrightarrow 1 \geq \frac{1}{2} \cdot (1+\frac{1}{n})^k \Longleftrightarrow 2 \geq (1+\frac{1}{n})^k.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^k = 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, ab dem die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fällt. Da die Folge durch 0 nach unten beschränkt ist, gibt es nach dem Monotoniekriterium (Satz II.1.16) einen Grenzwert. □

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Fibonacci-Folge) (2 Punkte)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci Folge. Entscheiden Sie, ob die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{n}{f_n}$$

konvergiert. (Zu so einer Entscheidung gehört immer ein Beweis!)

Lösungshinweise: Wir wollen zuerst zeigen, dass die Folge b_n für $n \geq 2$ monoton fallend ist.
Z.z: $\frac{n}{f_n} \geq \frac{n+1}{f_{n+1}}$

$$\begin{aligned} & \frac{n}{f_n} \geq \frac{n+1}{f_{n+1}} \\ \Leftrightarrow\quad & n \cdot f_{n+1} \geq f_n \cdot n + f_n \\ \Leftrightarrow\quad & n \cdot \underbrace{(f_{n+1} - f_n)}_{f_{n-1}} \geq f_n \\ \Leftrightarrow\quad & n \cdot f_{n-1} \geq f_n \end{aligned}$$

Dies ist wahr, da

$$n \cdot f_{n-1} \geq 2 \cdot f_{n-1} \geq f_{n-1} + f_{n-2} = f_n\,.$$

Somit ist die Folge monoton fallend. Sie ist auch durch 0 nach unten beschränkt. Somit ist sie nach dem Monotoniekriterium (Satz II.1.6) konvergent. □

Aufgabe H2 (Wahr oder falsch?) (2+2+1 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen für reelle Folgen:

(a) Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier divergenter Folgen ist ebenfalls divergent (getrennt für die vier Operationen).

(b) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann, wenn $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

(c) Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N_\varepsilon$ gilt: $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.
Hinweis: Betrachten Sie $a_n = \sqrt{n}$.

Lösungshinweise:

(a) Alle Aussagen sind falsch. Gegenbeispiele:

- Summe: $a_n = n$ und $b_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Differenz: $a_n = n$ und $b_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Produkt: $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Quotient: $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Aussage ist wahr. Aus der Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt nach den Grenzwertsätzen (Satz II.1.9) die Konvergenz der Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sei umgekehrt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = c$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = d$, dann ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} 2a_n = \lim_{n\to\infty}((a_n + b_n) + (a_n - b_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) + \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = c + d. \end{aligned}$$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{c+d}{2}$.
Entsprechend:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} 2b_n = \lim_{n\to\infty}((a_n + b_n) - (a_n - b_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) - \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = c - d. \end{aligned}$$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{c-d}{2}$. □

(c) Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $a_n = \sqrt{n}$. Offensichtlich divergiert die Folge, denn für jedes $M > 0$ ist $a_n > M$ für $n > M^2$. Daher ist (a_n) keine Cauchyfolge. Aber:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| &= \lim_{n\to\infty} |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0 \end{aligned}.$$

Aufgabe H3 (Konvergenz) (1+2 Punkte)

Untersuchen Sie die beiden nachstehenden Folgen auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\sqrt{\frac{n^2+1}{(10n-5)^2}}\right)^3.$$

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{\left(1 + \frac{1}{\frac{2}{5}n}\right)^n n^7 + 2n^5 + 3n^2}{3n^7 + 5n^2 + 2n^3}.$$

Lösungshinweise:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n :&= \left(\sqrt{\frac{n^2+1}{(10n-5)^2}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{n^2+1}{100n^2 - 100n + 25}}\right)^3 = \left(\frac{1}{10}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2})}}\right)^3 \\ &= \frac{1}{1000}\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}}}\right)^3 \end{aligned}$$

Mit dem Satz über Summen, Produkte, Quotienten und Wurzeln von konvergenten Folgen folgt,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1000}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}}}\right)^3 = \frac{1}{1000}\left(\sqrt{\frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2}}}\right)^3 = \frac{1}{1000}\,.$$

(b) Es gilt zunächst

$$b_n := \frac{\left(1+\frac{1}{\frac{2}{5}n}\right)^n n^7 + 2n^5 + 3n^2}{3n^7+5n^2+2n^3} = \frac{\left(1+\frac{\frac{5}{2}}{n}\right)^n + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^5}}{3+\frac{5}{n^5}+\frac{2}{n^4}}.$$

Da nach Definition (vgl. Satz II.1.17) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp x$, folgt durch Anwendung der Grenzwertsï¿½tze

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{\frac{5}{2}}{n}\right)^n + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^5}}{3+\frac{5}{n^5}+\frac{2}{n^4}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{5}{2}}{n}\right)^n + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^5}}{3+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^5}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^4}} = \frac{\exp\frac{5}{2}}{3}.$$

$\square$