Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
03./04. November 2009

4. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wiederholung: injektiv und surjektiv)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : A \to B : x \mapsto \sin(x),$$

mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$.
Wählen Sie die Mengen A und B so, dass

(a) f injektiv aber nicht surjektiv,

(b) f surjektiv aber nicht injektiv,

(c) f bijektiv ist.

Lösungshinweise:

(a) Sei $A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $B = \mathbb{R}$. Dann ist f injektiv, da f streng monoton wachsend und stetig ist, aber nicht surjektiv, da zum Beispiel kein $x \in A$ existiert, so dass $f(x) = 2$, denn $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $A = \mathbb{R}$ und $B = [-1, 1]$. Dann ist f nicht injektiv, da $0, \pi \in A$ aber $f(0) = 0 = f(\pi)$. Da $f[A] = B$ gilt, ist f surjektiv.

(c) Sei $A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $B = [-1, 1]$. Dann ist f bijektiv, da f streng monoton wachsend und stetig ist und damit injektiv und $f[A] = B$ gilt, womit f auch surjektiv ist.

Aufgabe G2 (Rechnen mit komplexen Zahlen)
Gegeben seien folgende komplexe Zahlen

$$z_1 = 3 + 4i, \qquad z_2 = -2 + i, \qquad z_3 = 7 - i.$$

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z_1, z_2, z_3.

(b) Berechnen Sie $z_1 + z_3$, $z_1 - z_2$, $\overline{z_2}$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ und $|z_1|$.

Lösungshinweise:

(a) Es sind $\Re(z_1) = 3$, $\Im(z_1) = 4$, $\Re(z_2) = -2$, $\Im(z_2) = 1$, $\Re(z_3) = 7$ und $\Im(z_3) = -1$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
z_1 + z_3 &= (3+4i) + (7-i) &&= 10+3i \\
z_1 - z_2 &= (3+4i) - (-2+i) &&= 5+3i \\
\overline{z_2} &= \overline{(-2+i)} &&= -2-i \\
z_1 z_2 &= (3+4i)(-2+i) &&= -6+3i-8i-4 \quad = \quad -10-5i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3+4i}{-2+i} &&= \frac{(3+4i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} \\
&= \frac{-6-3i-8i+4}{4+1} &&= -\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i \\
|z_1| &= |3+4i| &&= \sqrt{3^2+4^2} \quad = \quad 5\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Assoziativ- und Distributivgesetz für komplexe Zahlen)
Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie das Assoziativgesetz der Multiplikation sowie das Distributivgesetz für komplexe Zahlen, das heißt zeigen Sie, dass

(a) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$,

(b) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Lösungshinweise: Seien $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$. Dann gilt mithilfe Definition I.5.1 und den Körperaxiomen der reellen Zahlen:

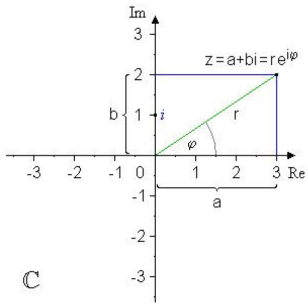
(a) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = \big((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)\big) \cdot \big(x_3, y_3\big) = \big(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1\big) \cdot \big(x_3, y_3\big) =$
$\big((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + x_3(x_1y_2 + x_2y_1)\big) =$
$\big(x_1x_2x_3 - x_3y_1y_2 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1\big) =$
$\big(x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2), x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + (x_2x_3 - y_2y_3)y_1\big) =$
$\big(x_1, y_1\big)(x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2\big) = \big(x_1, y_1\big) \cdot \big((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)\big) = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

(b) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = \big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) \cdot \big(x_3, y_3\big) = \big(x_1 + x_2, y_1 + y_2\big) \cdot \big(x_3, y_3\big) =$
$\big((x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3, (x_1 + x_2)y_3 + x_3(y_1 + y_2)\big) =$
$\big(x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3, x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2\big) =$
$\big(x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1\big) + \big(x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2\big) = \big(x_1, y_1\big) \cdot \big(x_3, y_3\big) + \big(x_2, y_2\big) \cdot \big(x_3, y_3\big) =$
$z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Aufgabe G4 (Polardarstellung)
Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a = r\cos\varphi$ und $b = r\sin\varphi$. Mithilfe Eulers Formel bekommen wir die Polardarstellung von z als

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

$$\text{mit } r = |z| \text{ und } \varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{falls } a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{falls } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{falls } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{falls } a = 0, b \geq 0 \\ -\pi/2 & \text{falls } a = 0, b < 0 \end{cases}.$$



(a) Machen Sie sich die verschiedenen Fälle für φ zeichnerisch klar.

(b) Seien nun $z_1 = 2i$ und $z_2 = -\frac{4}{\sqrt{2}} + i\frac{4}{\sqrt{2}}$.
Bestimmen Sie die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

(c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus a) die Polardarstellungen von $z_3 = z_1 z_2$ und $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$.
Hinweis: Benutzen Sie die Schreibweise mit der Exponentialfunktion.

(d) Geben Sie z_3 und z_4 in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

(e) Zeichnen Sie z_1, z_2, z_3 und z_4 in eine komplexe Ebene ein und interpretieren Sie die Multiplikation mit z_2 und die Division mit z_2 geometrisch.

Lösungshinweise:

(a) Siehe zum Beispiel `http://siegdiet.de/Dokumente/MeWS/komplex.pdf`.

(b) Es gilt $|z_1| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$ und $\varphi = \arctan\frac{0}{2} = \frac{\pi}{2} = 90°$.
Damit ergibt sich
$$z_1 = 2(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})) \quad (= 2\exp(\tfrac{\pi}{2}i)\ ).$$
Es gilt $|z_2| = \sqrt{(\frac{-4}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{4}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{16}{2} + \frac{16}{2}} = \sqrt{16} = 4$ und $\varphi = \arctan -\frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} + \pi = \arctan(-1) + \pi = \frac{3}{4}\pi = 135°$.
Damit ergibt sich
$$z_2 = 4(\cos(\tfrac{3}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{3}{4}\pi)) \quad (= 4\exp(\tfrac{3}{4}\pi i)\ ).$$

(c) Es gilt
$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 z_2 = 2\exp(\tfrac{\pi}{2}i)4\exp(\tfrac{3}{4}\pi i) = 8\exp(\tfrac{1}{2}\pi i + \tfrac{3}{4}\pi i) = 8\exp(\tfrac{5}{4}\pi i) \\ (&= 8(\cos(\tfrac{5}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{5}{4}\pi)) \quad). \end{aligned}$$
und
$$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\exp(\frac{\pi}{2}i)}{4\exp(\frac{3}{4}\pi i)} = \tfrac{1}{2}\exp(\tfrac{\pi}{2}i - \tfrac{3}{4}\pi i) = \tfrac{1}{2}\exp(-\tfrac{1}{4}\pi i) \quad \left(= \tfrac{1}{2}(\cos(\tfrac{7}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{7}{4}\pi))\right).$$

(d) Es gilt
$$z_3 = 8(\cos(\tfrac{5}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{5}{4}\pi)) = -8\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i8\tfrac{1}{\sqrt{2}} = -4\sqrt{2} - i4\sqrt{2}$$
und
$$z_4 = \tfrac{1}{2}(\cos(\tfrac{7}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{7}{4}\pi)) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{4} - i\tfrac{\sqrt{2}}{4}.$$

(e) Die Multiplikation mit z_2 entspricht einer Drehung um 135 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn und einer Streckung um den Faktor 4. Die Division mit z_2 entspricht einer Drehung um 135 Grad im Uhrzeigersinn und einer Streckung (bzw. Stauchung) um den Faktor $\frac{1}{4}$.

Aufgabe G5 (Folgen)

Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^3+n+2}{6n^7+5n^4+n^2+1}$.

(b) Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{n^3+n+2}{n^2+1}$.

Lösungshinweise:

(a) Es gilt

$$a_n = \frac{n^3+n+2}{6n^7+5n^4+n^2+1} = \frac{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}+\frac{2}{n^7}}{6+\frac{5}{n^3}+\frac{1}{n^5}\ \frac{1}{n^7}}.$$

Nach dem Satz über Summe und Produkt konvergenter Folgen folgt wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ auch

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^7} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^3} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} 6 = 6.$$

Damit konvergiert der Zähler als Summe konvergenter Folgen gegen 0 und der Nenner gegen 6. Insgesamt ergibt sich also nach dem Satz ber Summe und Produkt konvergenter Folgen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0+0+0}{6+0+0+0} = 0.$$

(b) Es gilt

$$b_n = \frac{n^3+n+2}{n^2+1} = \frac{n^2(n+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{n+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \geq \frac{n}{1+\frac{1}{n^2}} \geq \frac{n}{2}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ divergiert also auch (b_n) gegen $+\infty$.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Komposition von Funktionen) (1+2 Punkte)

(a) Finden Sie zwei Abbildungen $f_1 \neq f_2$, sodass $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ gilt. Gilt diese Aussage für alle Abbildungen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Betrachten Sie die Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $D \subseteq A$.

(i) Angenommen f und g seien injektiv.
Ist dann die Komposition $f \circ g : C \to B$ auch injektiv?

(ii) Angenommen f und g seien surjektiv.
Ist dann die Komposition $f \circ g : C \to B$ auch surjektiv?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösungshinweise:

(a) Wir wählen zum Beispiel $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x+1, D(f_1) = \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = x+2, D(f_2) = \mathbb{R}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$, dann gilt $(f_1 \circ f_2)(x) = (x+2)+1 = (x+1)+2 = (f_2 \circ f_1)(x)$. Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, folgt also $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ für diese bestimmten Funktionen. Im Allgemeinen gilt die Aussage nicht. Man überlegt sich das leicht, wenn zum Beispiel $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $D(f_1) = D(f_2) = \mathbb{R}$ gilt; denn dann folgt $(f_1 \circ f_2)(x) = 2$, aber $(f_2 \circ f_1)(x) = 4$.

(b) (i) *Behauptung:* Die Komposition $f \circ g$ ist injektiv.
Beweis: Seien $x, y \in A$ und $x \neq y$. Da g injektiv ist, gilt $g(x) \neq g(y)$. Aufgrund der Injektivität von f folgt daraus, daß auch $f(g(x)) \neq f(g(y))$ gilt. Folglich ist $f \circ g$ injektiv.

(ii) *Behauptung:* Im Allgemeinen ist die Komposition $f \circ g$ nicht surjektiv.
Beweis: Betrachte das folgende Gegenbeispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad g : [0, \infty) \to [0, \infty) : x \mapsto x.$$

Offensichtlich sind beide Funktionen surjektiv, aber $f \circ g : [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ nicht, da $f \circ g$ nur positive Werte annimmt.
(Bemerkung: In dem Fall $D = A$ ist die Komposition surjektiver Funktionen immer surjektiv.)

Aufgabe H2 (Eulersche Formel) (1+3 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Sie haben in der Vorlesung die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

kennengelernt. Es ist also $\cos(x) = \Re(e^{ix})$ und $\sin(x) = \Im(e^{ix})$.

(a) Zeigen Sie mithilfe der Formel, dass $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Benutzen Sie, dass $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$.

(b) Benutzen Sie Eulers Formel, um folgende (teilweise schon bekannte) Gleichungen herzuleiten:
(i) $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\quad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$,
(ii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$,
(iii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

Lösungshinweise:

(a) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann ist
$\exp(\overline{z}) = \exp(x - iy) = \exp(x)\exp(-iy) = \exp(x)(\cos(-y) + i\sin(-y)) = \exp(x)(\cos(y) - i\sin(y)) = \exp(x)\overline{\exp(iy)} = \overline{\exp(x)}\,\overline{\exp(iy)} = \overline{\exp(x)\exp(iy)} = \overline{\exp(x+iy)} = \overline{\exp(z)}$.

(b) (i) $\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x) + \cos(-x) + i\sin(-x)) = \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x)) = \cos(x)$.
$\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}(\cos(x) + i\sin(x) - \cos(-x) - i\sin(-x)) = \frac{1}{2i}(\cos(x) + i\sin(x) + - \cos(x) + i\sin(x)) = \sin(x)$.

(ii) Nach der Definition des Betrages einer komplexen Zahl und Aufgabenteil (a) folgt: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = \Re^2(e^{ix}) + \Im^2(e^{ix}) = |e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$.

(iii) $\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) = (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))$.
Vergleich von Real- und Imaginärteil führt zum Gewünschten.

Alternativ können (ii) und (iii) auch mithilfe von (i) gezeigt werden.

Aufgabe H3 (Folgen) (1+1+1 Punkte)

(a) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

(b) Finden Sie zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die beide divergieren, aber deren Summe $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beschränkt ist, weder monoton fallend noch monoton steigend ist, aber konvergiert.

Lösungshinweise:

(a) Eine mögliche Folge ist $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$. Diese Folge alterniert zwischen -1 und 1 , also gilt offensichtlich, dass $|a_n| \leq 1$ für alle n in $\mathbb{N}$. Die Folge ist also beschränkt und divergiert dennoch.

(b) Zwei mögliche Folgen sind $a_n = n, n \in \mathbb{N}$ und $b_n = -n, n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) divergiert gegen $+\infty$, die Folge (b_n) divergiert gegen $-\infty$. Betrachten wir die Folge der Summen $a_n + b_n = n + (-n) = 0, n \in \mathbb{N}$. Diese Folge ist konstant und konvergiert dementsprechend gegen 0.

(c) Eine mögliche Folge ist $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Dies ist offensichtlich eine Nullfolge, die im Betrag durch 1 beschränkt ist, aber nicht monoton fallend oder steigend ist, da sie immer abwechselnd positive und negative Werte annimmt.