Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
27./28. Oktober 2009

3. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Binominialkoeffizienten)

Für natürliche Zahlen $n \geq k \geq 0$ ist der *Binominialkoeffizient* „n über k" definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}\,;$$

per Konvention ist außerdem $\binom{n}{k} := 0$ für $k > n$. Zeigen Sie, dass es genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge M gibt.

Lösungshinweise: Um eine k-elementige Teilmenge $T \subset M$ zu bekommen, können wir alle Elemente von M beliebig anordnen und dann die k ersten Elemente wählen. Nach Aufgabe G3(b) vom zweiten Übungsblatt gibt es für dies Anordnung $n!$ Möglichkeiten. Für die Teilmenge spielt es jedoch keine Rolle, wie die k ersten Elemente angeordnet sind, und wie die $n-k$ übrigen Elemente angeordnet sind. Hierfür gibt es wiederum $k!$ bzw. $(n-k)!$ Möglichkeiten, so dass sich das gewünschte Ergebnis ergibt. □

Aufgabe G2 (Pascalsches Dreieck)

Zeigen Sie die Aussage

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(a) mit der Definition des Binominialkoeffizienten,

(b) mit der kombinatorischen Interpretation aus Aufgabe G1.

Lösungshinweise:

(a) Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{n!((k+1)+(n-k))}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

(b) Sei M eine $(n+1)$-elementige Menge und $m \in M$. Die $(k+1)$-elementigen Teilmengen von M sind genau die $k+1$-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{m\}$ zusammen mit den Mengen $T \cup \{m\}$ für alle k-elementigen Teilmengen T von $M \setminus \{m\}$. Aus Aufgabe G1 folgt nun die Behauptung. □

Aufgabe G3 (Funktionen)

Bezeichne S die Menge aller Studenten an der TU Darmstadt und D die Menge aller Daten eines Jahres.

(a) Sei $f : S \to D$ die Abbildung, die jedem Studenten aus der Menge S das Datum seines Geburtstages zuordnet.

Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn die Menge S durch die Menge aller an deinem Tisch sitzenden Studenten ersetzt wird?

(b) Sei M die Menge aller an der TU Darmstadt vergebenen Matrikelnummern und $g : S \to M$ die Abbildung, die jedem Studenten seine Matrikelnummer zuordnet.

Ist g injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn die Menge M durch die Menge der natürlichen Zahlen ersetzt wird?

Lösungshinweise:

(a) Da an der TU mehr als 365 Studenten studieren ein Jahr aber nur 365 Tage hat, müssen mindestens zwei Studenten am gleichen Tag Geburtstag haben, womit f *nicht injektiv* sein kann. Geht man davon aus, dass an jedem Tag mindestens ein TU-Student Geburtstag hat, dann ist f *surjektiv.* Weil f nicht injektiv ist, ist f auch *nicht bijektiv.*

Bezeichne $\tilde{S}$ die Menge der Studenten, die an deinem Tisch sitzen, und $\tilde{f} : \tilde{S} \to D$ die Funktion die jedem dieser Studenten das Datum seines Geburtstages zuordnet. Dann ist die Funktion $\tilde{f}$ höchstwahrscheinlich *injektiv*, weil alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, und *nicht surjektiv*, da nicht an allen Tagen einer von ihnen Geburtstag hat. Folglich ist $\tilde{f}$ auch *nicht bijektiv.*

(b) Da jede Matrikelnummer nur einmal vergeben wird, haben alle Studenten verschiedene Matrikelnummern, woraus folgt, daß g *injektiv* ist. Da es zu jeder vergebenen Matrikelnummer auch einen zugehörigen Studenten gibt, ist g auch *surjektiv* und damit auch *bijektiv.*

Bezeichne $\tilde{g} : \tilde{S} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die jedem Studenten seine Matrikelnummer zuordnet. Dann ist $\tilde{g}$ *nicht surjektiv*, da es zum Beispiel keinen Studenten mit der Matrikelnummer 1000000000 gibt. Folglich ist $\tilde{g}$ *nicht bijektiv.* Aus demselben Grund wie g ist auch $\tilde{g}$ *injektiv.*

Aufgabe G4 (Binomialsatz)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,.$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$. Dies nennt man *Indexverschiebung*.

(b) Welche Eigenschaften der reellen Zahlen haben Sie beim Beweis in (a) benutzt? Was folgt daraus für die Gültigkeit der Aussage? Gilt die Aussage auch für $x, y \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in \mathbb{C}$?

Lösungshinweise:

(a) Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ reduziert sich die Aussage zu $x + y = x + y$. Dies ist offensichtlich war.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass für ein festes n gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,.$$

Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) &\overset{IV}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \cdot (x+y) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{(n+1)-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{(n+1)-k} \\
&= y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{(n+1)-k} + x^{n+1} \\
&\overset{G2}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}\,.
\end{aligned}$$

($\star$) Hier wurde die Indexverschiegung benutzt. □

(b) Bei der Rechnung wurden nur einige der Körperaxiome benutzt.[1] Da diese Axiome auch in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$ gelten, gelten die Aussagen auch dort. Allgemein gelten die Aussagen in jedem Körper, das heißt einer Struktur, die die Körperaxiome erfüllt. Beachtet werden muss noch, dass $\binom{n}{k}$ eigentlich eine natürlich Zahl ist und kein Element eines vorgegebenen Körpers; dies kann dadurch umgangen werden, dass man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $\bar{n} \in K$ definiert durch $\bar{n} := \sum_{i=1}^{n} 1$. Wenn man sich $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ als $\overline{\binom{n}{k}}$ in diesem Sinne denkt, ergibt die Aussage für jeden belieben Körper Sinn.

Aufgabe G5 („Deppenformel")

(a) Leiten Sie aus den De Morganschen Gesetzen die Aussage $\forall x A(x) \vee \exists x \neg A(x)$ her.

[1] Tatsächlich wurden insbesondere die Axiome (A5) und (A8) nicht benutzt. Eine Struktur in der alle Körperaxiome außer (A5) und (A8) gelten nennt man *Ring mit* 1. Ein Beispiel dafür sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie daraus die „Deppenformel“ $\exists x(A(x) \Rightarrow \forall y A(y))$.

Lösungshinweise:

(a) Um zu zeigen, dass eine Disjunktion gilt, reicht es zu zeigen, dass eine Aussage wahr ist, wenn die andere falsch ist. Sei $\forall x A(x)$ falsch, gelte also $\neg\forall x A(x)$. Nach dem zweiten De Morganschen Gesetz folgt dann $\exists x \neg A(x)$. □

Alternativ: Offensichtlich gilt $\forall x A(x) \vee \neg\forall x A(x)$. Die zweite Aussage ist nach dem zweiten De Morganschen Gesetz äquivalent zu $\exists x \neg A(x)$. □

(b) Nach dem Prinzip aus (a) gilt eine der beiden Aussagen $\forall x A(x)$ und $\exists x \neg A(x)$. Wir unterscheiden diese beiden Fälle.

$\forall x A(x)$ ist wahr: Damit gilt die Implikation der Deppenformel offensichtlich, da die Konklusion wahr ist.

$\exists x \neg A(x)$ ist wahr: Es gibt also ein x für das $A(x)$ falsch ist. Wir wählen als x in der Deppenformel dieses x. Damit ist die Prämisse $A(x)$ falsch und somit offensichtlich die Implikation richtig. □

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Summendarstellung der Fibonacci-Zahlen) (3 Punkte)

Zeigen Sie die folgende Summendarstellung für die aus der letzten Übung bekannten Fibonacci Zahlen:

$$F_{n+1} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-l}{l},$$

wobei $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich a bezeichnet (abrunden).

Lösungshinweise: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ reduziert sich die Aussage zu $1 = 1$. Dies ist offensichtlich war. Für $n = 1$ reduziert sich die Aussage ebenfalls zu $1 = 1$.
Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass für ein festes m gilt:

$$F_{n+1} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-l}{l} \quad \text{für alle } n \leq m\,.$$

Induktionsschritt: Es gilt

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \overset{IV}{=} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-l}{l} + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-l}{l}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle: n gerade und n ungerade.

n **gerade:** Dann gilt

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-l}{l} + \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-1-l}{l} \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-l}{l} + \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-l}{l-1} \\
&= 1 + \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}} \left(\binom{n-l}{l} + \binom{n-l}{l-1} \right) \\
&\overset{G2}{=} 1 + \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n+1-l}{l} = \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n+1-l}{l} \overset{n \text{ gerade}}{=} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-l}{l}.
\end{aligned}$$

n **ungerade:** Dann gilt

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-l}{l} + \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1-l}{l} \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-l}{l} + \sum_{l=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-l}{l-1} \\
&= 2 + \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\binom{n-l}{l} + \binom{n-l}{l-1} \right) \\
&\overset{G2}{=} 2 + \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n+1-l}{l} = \sum_{l=0}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n+1-l}{l} \overset{n \text{ ungerade}}{=} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-l}{l}.
\end{aligned}$$

(Beachten Sie, dass $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.) □

Aufgabe H2 (Funktionen) (2 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktionen

$$\begin{aligned}
f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 29, \\
f_2 &: [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 29, \\
g_1 &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x^2 \quad \text{und} \\
g_2 &: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 : x \mapsto x^2
\end{aligned}$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität und geben Sie jeweils das Bild der Funktion an. Geben Sie auch die Umkehrfunktion an, falls diese existiert.

Lösungshinweise:

Die Funktion f_1 ist *injektiv*, da für zwei beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ aus $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ nach Definition $3x_1 + 29 = 3x_2 + 29$ bzw. mit einfachen Umformungen $x_1 = x_2$ folgt. Sie ist auch *surjektiv*, da für ein *beliebiges* $y \in \mathbb{R}^3$ die Zahl $\frac{y-29}{3} \in \mathbb{R}^3$ ist und $f_1\left(\frac{y-29}{3}\right) = y$ gilt. Damit ist σ *bijektiv* und

$$f_1^{-1} : R \to R : y \mapsto \frac{y-29}{3}$$

ist die Umkehrfunktion von f_1. Für das Bild von f_1 gilt $f_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Die Funktion f_2 ist *injektiv* nach der exakt selben Argumentation wie für f_1. Allerdings ist sie *nicht surjektiv*, da offensichtlich alle Zahlen im Bild von f_2 größer als Null sind und es daher zum Beispiel kein x aus dem Definitionsbereich gibt, sodass $f_2(x) = -1$. Folglich ist f_2 auch nicht bijektiv und besitzt deshalb keine Umkehrfunktion. Da f_2 streng monoton wachsend (und stetig) ist, gilt $f_2[[0,\infty)] = [29,\infty)$.
Die Funktion g_1 ist *nicht injektiv*, da zum Beispiel für $-1, 1 \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $g_1(-1) = 1 = g_1(1)$. Sie ist auch nicht *surjektiv*, da es kein $x \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $f(x) = -1$, denn offensichtlich sind alle Funktionswerte größer oder gleich Null. Folglich ist sie auch *nicht bijektiv* und besitzt keine Umkehrfunktion. Das Bild von g_1 ist die Menge der (ganzzahligen) Quadratzahlen.
Die Funktion g_2 ist *nicht injektiv* nach derselben Argumentation wie für g_1. Sie ist auch *nicht surjektiv*, da es kein $x \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $f(x) = 2$, denn $\sqrt{2}$ ist keine natürliche Zahl. Folglich ist sie auch *nicht bijektiv* und besitzt keine Umkehrfunktion. Das Bild von g_2 ist wieder die Menge der (ganzzahligen) Quadratzahlen.

Aufgabe H3 (Abbildungen, kartesisches Produkt, Graph) (2+2 Punkte)

(a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, wobei $D := \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$ und

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad -1 \leq x < 0, \\ x+1 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} & \text{für} \quad 1 \leq x\,. \end{cases}$$

(i) Skizzieren Sie den Graphen von f.
(ii) Bestimmen Sie die Bildmenge von f.
(iii) Geben Sie das Urbild von $[\frac{3}{2}, 4[$ bzgl. f an. (Für eine Funktion $f : A \to B$ ist das Urbild $f^{-1}[C]$ von $C \subset B$ definiert als $f^{-1}[C] := \{x \in A \,|\, f(x) \in C\}$.)

(b) Seien $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$.

1. Welche der folgenden Teilmengen von $X \times Y$ ist der Graph einer Abbildung $f : X \to Y$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i)	$\{(1,b),(2,d),(3,a),(4,f)\}$	(iv)	$\{(2,a),(3,b),(1,c),(2,d),(4,e),(1,f)\}$
(ii)	$\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$	(v)	$\{(4,c),(1,f),(3,e),(2,c)\}$
(iii)	$\{(3,e),(2,a),(1,b),(3,f)\}$	(vi)	$\{(2,d),(1,f),(3,a),(1,b),(4,c)\}$

2. Seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ gegeben durch $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$. Berechnen Sie die Bildmengen $f[A] := \{y \in Y : \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$ und die Urbilder von B bzgl. f für alle Funktionen f, die Sie oben gefunden haben.

Lösungshinweise:

(a) (i)

(ii) $f[D] = [-1, 0[\cup [1, \infty[\,.$
(iii) Das Urbild von $[\frac{3}{2}, 4[$ bzgl. f ist $[\frac{1}{2}, 7[\,.$

(b) 1. Die Mengen (i) und (v) sind Graphen von Abbildungen. Die anderen Mengen sind keine Graphen von Abbildungen: In (ii) und (iii) wird nicht allen Elementen aus der Definitionsmenge ein Wert zugewiesen, in (iii), (iv) und (vi) wird einigen Elementen aus der Definitionsmenge mehr als ein Wert zugewiesen.

2. Bezeichnen wir mit g die zugehörige Abbildung von Graph (i) und mit h die zugehörige Abbildung von Graph (v). Dann ist $\{a, b, d\}$ das Bild von A unter g, und das Bild von A unter h ist $\{c, e, f\}$. Das Urbild von B bzgl. g ist $\{1, 2, 3\}$, und das Urbild von B bzgl. h ist $\{2, 4\}$.

Aufgabe H4 (Noch mehr Induktion) (1 Punkt)

Die Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$K_0 = 1 \quad \text{und} \quad K_{n+1} = 1 + \min(2K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 3K_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}).$$

Zeigen Sie, dass $K_n \geq n$.

Lösungshinweise: Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass $K_n \geq n + 1$. Dies impliziert offensichtlich die Behauptung.
Induktionsanfang: Offensichtlich ist $K_0 \geq 1$.
Induktionsvoraussetzung: $K_n \geq n + 1$ für ein festes n.
Induktionsschritt: $K_{n+1} = 1 + \min(2K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 3K_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}) \geq 2 + n$, da $2K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \geq 2\frac{n-1}{2} + 2 \geq n + 1$ und $3K_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \geq 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 3 \geq 3\frac{n-2}{3} + 3 \geq n + 1$ nach Induktionsvoraussetzung. $\square$