Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
20./21. Oktober 2009

2. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wiederholung: Mengen)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}, \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}, \\ M_3 &= \{n \in \mathbb{N} : 2 \text{ ist Teiler von } n\}. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie $M_1 \setminus M_2$, $M_3 \cup M_2$, und $M_1 \cap M_3$ und skizzieren Sie diese Mengen.

(c) Bestimmen Sie für die Mengen M_1, M_2 und M_3 jeweils Supremum und Infimum (falls diese existieren) und geben Sie an, ob diese in der jeweiligen Menge liegen (in diesem Fall spricht man von einem Maximum bzw. Minimum).

(d) Beweisen Sie, dass $M_2 \subseteq M_1$.

Lösungshinweise:

(a) keine Lösungshinweise

(b) (1.) $M_1 \setminus M_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$.
(2.) $M_3 \cup M_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2 \vee x = 2 \cdot n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$.
(3.) $M_1 \cap M_3 = \{2\}$.

(c) $\sup M_1 = 3 \notin M_1$, $\inf M_1 = -3 \notin M_1$,
$\sup M_2 = 2 \in M_2$, $\inf M_2 = -2 \in M_2$,
$\sup M_3$ existiert nicht, $\inf M_3 = 2 \in M_3$.

(d) Sei $x \in M_2 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow x^2 = |x|^2 \leq 4 < 9 \Rightarrow x \in M_1$.

Aufgabe G2 (Rechnen mit Summen und Produkten)

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Summen und Produkte:

$$(i) \quad \sum_{i=0}^{5}(i+1) \qquad (ii) \sum_{m=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(km-2k)$$

$$(iii) \sum_{m=1}^{2}\prod_{k=m}^{3}(k^2-1).$$

Lösungshinweise:

(i)

$$\sum_{i=0}^{5}(i+1) = (0+1)+(1+1)+(2+1)+(3+1)+(4+1)+(5+1)$$
$$= 1+2+3+4+5+6$$
$$= 21.$$

alternativ:

$$\sum_{i=0}^{5}(i+1) = \sum_{i=0}^{5} i + \sum_{i=0}^{5} 1 = 15+6 = 21.$$

(ii)

$$\sum_{m=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(km-2k) = \sum_{k=0}^{2}(k-2k) + \sum_{k=0}^{2}(2k-2k) + \sum_{k=0}^{2}(3k-2k)$$
$$= -\sum_{k=0}^{2} k + 0 + \sum_{k=0}^{2} k$$
$$= 0.$$

(iii)

$$\sum_{m=1}^{2}\prod_{k=m}^{3}(k^2-1) = \prod_{k=1}^{3}(k^2-1) + \prod_{k=2}^{3}(k^2-1)$$
$$= (1^2-1)\cdot(2^2-1)\cdot(3^2-1) + (2^2-1)\cdot(3^2-1)$$
$$= 0\cdot 3\cdot 8 + 3\cdot 8$$
$$= 24.$$

Aufgabe G3 (Vollständige Induktion)

(a) Beweisen Sie die folgende Formel mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k!\cdot k = (n+1)! - 1.$$

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: n Personen können sich auf $n!$ verschieden Weisen in einer Reihe aufstellen.

Lösungshinweise:

(a)(IA) $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k!k = 1!1 = 1 = (1+1)! - 1.$$

(IH) Die Behauptung gelte für alle $n \leq n_o \in \mathbb{N}$.

(IS) $n_o \to n_o + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k!k = \sum_{k=1}^{n} k!k + (n+1)!(n+1) \overset{(IH)}{=}$$
$$[(n+1)! - 1] + (n+1)!(n+1) = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1.$$

(b)(IA) Eine Person kann sich genau auf eine Weise in eine Reihe aufstellen.

(IH) n Personen können sich auf $n!$ Weisen in einer Reihe aufstellen.

(IS) Existiert eine Reihe aus n Personen, dann kann sich eine weitere Person an $n+1$ verschiedenen Stellen in die Reihe stellen (davor, dahinter oder mittendrin). Nach Induktionshypothese gibt es also $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$ Möglichkeiten für $n+1$ Personen eine Reihe zu bilden.

Aufgabe G4 (reelle Zahlen und Körperaxiome)

(a) Gegeben seien die folgenden Aussagen:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}_0 : n > x, \tag{1}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n > x, \tag{2}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}_0 : x \geq n, \tag{3}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xy \leq 0 \tag{4}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : xy \leq 0 \tag{5}$$

Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründe Sie Ihre Entscheidung.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie die Körperaxiome, um zu zeigen, dass die Gleichung $a + x = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich $x = b - a$ hat.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $x = b - a$ die Gleichung löst. Zeigen Sie anschließend die Eindeutigkeit der Lösung.

Lösungshinweise:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt für $n := \lceil |x| \rceil + 1 \in \mathbb{N}$, dass $n > x$. (Die Funktion $\lceil \cdot \rceil$ rundet hierbei auf die nächste größere ganze Zahl auf.) Folglich ist die Aussage (1) wahr (vergl. Archimedisches Prinzip, S.10 im Skript).

Für $x = -1 \in \mathbb{R}$ gilt $n > x$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Folglich ist die Aussage (2) wahr.

Die Aussage (3) ist die Negation der Aussage (1). Folglich ist die Aussage 3 falsch.

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wählt man nun $y = -x$, so ist $xy = -x^2 \leq 0$. Folglich ist die Aussage 4 wahr.

Sei $x = 0$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $xy = 0 \cdot y = 0 \leq 0$. Folglich ist die Aussage 5 wahr.

(b) Wir zeigen zunächst, dass $x = b - a$ die Gleichung löst. Es ist nämlich

$$a + x = a + (b - a) = a + (b + (-a)) \overset{A1}{=} a + ((-a) + b) \overset{A2}{=} (a + (-a)) + b \overset{A4}{=} 0 + b \overset{A1}{=} b + 0 \overset{A3}{=} b.$$

Also löst x die Gleichung.
Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Lösung. Sei y irgendeine relle Zahl, die die Gleichung erfüllt, also $a + y = b$. Wir müssen zeigen, dass $y = x = b - a$. Addition von $(-a)$ auf beiden Seiten der Gleichung $a + y = b$ ergibt $(-a) + (a + y) = (-a) + b$, also nach A2 $((-a) + a) + y = (-a) + b$. Aus A4 folgt dann $0 + y = (-a) + b$ und mit A3 und A1 $y = b + (-a) = b - a$.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Vollständige Induktion) (3+1 Punkte)

(a) Die Fibonacci-Folge $(F_1, F_2, \ldots)$ ist eine Folge natürlicher Zahlen. Dabei ist jedes Folgeglied die Summe seiner beiden Vorgänger. Formal bedeutet dies:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{mit } F_1 = 1, \quad F_2 = 1.$$

(i) Bestimmen Sie die ersten acht Folgeglieder.

(ii) Beweisen Sie folgende explizite Formel für $n \geq 1$:

$$F_n = \frac{r^n - s^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{mit } r = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(b) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis für die Aussage $15 = 16$:

Behauptung: Für jedes $n \geq 1$ gilt $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Nachrechnen zeigt, dass die Behauptung für $n = 1$ offensichtlich gilt.

Induktionsannahme: Es sei $k \in \mathbb{N}$. Nehmen Sie an, dass die Aussage für k gilt, das heißt $1 + 2 + \ldots k = \frac{1}{2}k(k+1) + 1$.

Induktionsschritt von k auf $k+1$: Es gilt

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) \overset{IA}{=} \frac{1}{2}k(k+1) + 1 + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + 1,$$

was zu zeigen war.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Für $n = 5$ folgt daraus $15 = 16$.

Lösungshinweise:

(a) (i) $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21$.

(ii) Induktionsanfang:
Für $n = 1$: $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$
Da die Rekursionsformel der Fibonacci-Folge auf die <u>beiden</u> vorhergehenden Glieder Bezug nimmt, muss man den Induktionsanfang auch für $n = 2$ durchführen:
$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5} - (3 - \sqrt{5})) = 1$

Induktionshypothese: Die Behauptung gelte für alle $n < n_0 \in \mathbb{R}$.
Induktionsschritt von $n_0 - 1$ und n_0 nach $n_0 + 1$:

Z.z.: $F_{n+2} = \frac{r^{n+2} - s^{n+2}}{\sqrt{5}}$

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \overset{IH}{=} \frac{r^n - s^n}{\sqrt{5}} + \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(r^{n+1} + r^n - s^{n+1} - s^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(r^n \cdot (r + 1) - s^n \cdot (s+1)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(r^n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - s^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}) = \frac{r^{n+2} - s^{n+2}}{\sqrt{5}}$. (Hierbei hilft es, r^2 und s^2 zu berechnen.)

(b) Die Induktion geht für den Induktionsanfang $n = 1$ schief, wie man durch Einsetzen sehen kann: $1 \neq 2$.

Aufgabe H2 (Anordnungsaxiome) (1+2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Beweisen Sie die Aussage mithilfe der Anordnungsaxiome oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ab > 1$ und $a < 1$. Dann folgt, dass $b > 1$.

(b) Seien $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$. Dann folgt, dass $a \cdot x < b \cdot y$.

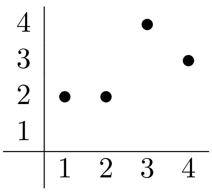
Lösungshinweise:

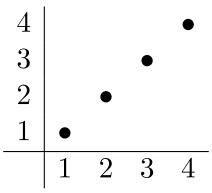
(a) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $a = -5$, $b = -2$. Dann ist $ab = 10 > 1$, $a = -5 < 1$, aber $b = -2 < 1$.

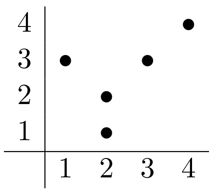
(b) Die Aussage ist wahr:
Wir benutzen die folgende Anordnungsaxiome aus der Vorlesung:
Transitivität (A11): $e < f$ und $f < g \Rightarrow e < g$.
Monotonie der Multiplikation (A13): $e < f$ und $0 < g \Rightarrow e \cdot g < f \cdot g$.
Beweis:
Ist eine der Ungleichung in $0 \leq x < y$ oder $0 \leq a < b$ mit Gleichheit erfüllt (also $x = 0$ oder $a = 0$), dann ist die Aussage äquivalent zu $0 < b \cdot y$. Dies ist wahr wegen (A13). (setze $e = 0,\ f = b,\ g = y$).
Sei nun $0 < x < y$ und $0 < a < b$. Aus (A13) folgt, dass $ax < ay$ und $ay < by$. Aus (A11) folgt dann $ax < by$.

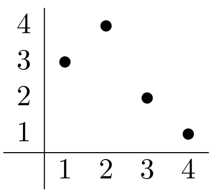
Aufgabe H3 (Funktionen) (3 Punkte)

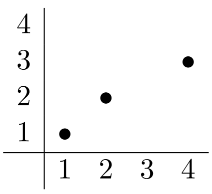
Sei $M := \{1, 2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Teilmengen von $M \times M$ kann Graph einer Funktion von M nach M sein?
Falls es eine solche Funktion gibt, untersuchen sie diese auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) 

(v) 

Lösungshinweise:

(i) Dies ist eine Funktion, da jedem Element des Definitionsbereiches genau ein Element des Wertebereiches zugeordnet wird. Sie ist nicht injektiv, da 1 und 2 das gleiche Bild haben, nämlich 2. Sie ist nicht surjektiv, da die 1 nicht erreicht wird.

(ii) Dies ist eine Funktion, da jedem Element des Definitionsbereiches genau ein Element des Wertebereiches zugeordnet wird. Sie ist bijektiv, also auch surjektiv und injektiv, da jedes Element im Wertebereich genau einmal erreicht wird.

(iii) Dies ist keine Funktion, da der Zahl 2 zwei unterschiedliche Elemente im Wertebreich, nämlich 1 und 2 zugeordnet werden.

(iv) ist eine Funktion, da jedem Element des Definitionsbereiches genau ein Element des Wertebereiches zugeordnet wird. Sie ist bijektiv, da jedes Element im Wertebereich genau einmal erreicht wird.

(v) Dies ist keine Funktion, da der Zahl 3 kein Element im Wertebreich zugeordnet wird.

Bemerkung: Für Funktionen $f : M \to M$ auf einer endlichen Menge M gilt injektiv ist gleich surjektiv ist gleich bijektiv.