Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
13./14. Oktober 2009

1. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik"

Gruppenübung

Wir betrachten die Aussage A (z. B. „Es regnet.") und die Aussage B (z. B. „Die Straße ist nass."). Wenn aus der Gültigkeit der Aussage A die Gültigkeit von Aussage B folgt, so sagen wir „A impliziert B" und schreiben

$$A \Rightarrow B.$$

Gilt die Implikation $A \Rightarrow B$, so ist die *Kontraposition* („Wenn B nicht gilt, gilt auch A nicht.") ebenfalls richtig. Der *Umkehrschluss* von $A \Rightarrow B$ ist $B \Rightarrow A$. Im Allgemeinen gibt es keinen Zusammenhang zwischen der Gültigkeit der Implikation und der des Umkehrschlusses.

Aufgabe G1 (Die Kontraposition)

Bilden Sie die Kontraposition der folgenden Aussagen:

(a) Wenn es regnet, ist die Straße nass.

(b) Wenn das Auto fährt, ist der Tank nicht leer.

(c) Wenn p eine Primzahl ist, dann gilt $p = 2$ oder p ist ungerade.

Lösungshinweise:

(a) Wenn die Straße nicht nass ist, regnet es nicht.

(b) Wenn der Tank leer ist, fährt das Auto nicht.

(c) Wenn p weder gleich 2 noch ungerade ist, so ist p keine Primzahl.

Aufgabe G2 (Der Umkehrschluss)

(a) Sie stehen vor einer geschlossenen, funktionsfähigen Tür, für die Sie keinen Schlüssel besitzen. Betrachten Sie die Implikation:

Die Tür ist abgeschlossen $\Rightarrow$ Die Tür kann nicht geöffnet werden.

Überlegen Sie sich, wie der Umkehrschluss lautet und ob dieser wahr oder falsch ist.

(b) Bilden Sie von der Aussage

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x < -1 \Rightarrow x$ ist negativ.

den Umkehrschluss. Was können Sie hier über die Richtigkeit sagen?

Lösungshinweise:

(a) Der Umkehrschluss lautet:

Die Tür kann nicht geöffnet werden $\Rightarrow$ Die Tür ist abgeschlossen.

Da wir von einer funktionsfähigen Tür ausgehen, muss die Tür abgeschlossen sein, falls sie nicht zu öffen ist. Also ist der Umkehrschluss richtig.

(b) Der Umkehrschluss lautet:

$$\text{Für } x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } x \text{ ist negativ} \Rightarrow x < -1.$$

Der Umkehrschluss ist falsch, da $-\frac{1}{2}$ negativ aber nicht kleiner als -1 ist.

Aufgabe G3 (Quantoren)
Überlegen Sie sich, welche der folgenden Aussagen stimmen und was die Unterschiede zwischen (a)(i) und (a)(ii) bzw. zwischen (b)(i) und (b)(ii) sind.

(a) (i) Für alle Autos gibt es einen Motor.
(ii) Es gibt einen Motor für alle Autos.

(b) (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \leq n$ gilt.
(ii) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x \leq n$ gilt.

Bemerkung: Statt „für alle" wird in Formeln häufig der *Allquantor* $\forall$ und statt „es existiert" der *Existenzquantor* $\exists$ benutzt. So kann die Aussage (b)(i) auch als $\forall\, x \in \mathbb{R}\; \exists\, n \in \mathbb{N} : x \leq n$ geschrieben werden.

Lösungshinweise: Die Aussage (a)(i) ist richtig. Die Aussage (a)(ii) hingegen ist falsch, denn sie besagt, dass es nur einen einzigen Motor für alle Autos gibt. Schon einen Motor, der gleichzeitig zwei Autos antreibt, sieht man eher selten.
Die Aussage (b)(i) ist richtig. Betrachtet man ein $x \in \mathbb{R}$ und setzt n als die nächst größere natürliche Zahl, so gilt $x \leq n$. Die zweite Aussage (b)(ii) ist falsch: Würde ein solches $n \in \mathbb{N}$ ist die Ungleichung $x \leq n$ für $x := n + 1$ offensichtlich nicht erfüllt.

Aufgabe G4 (Symmetrische Differenz)
Es seien A und B beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

gilt.
Anmerkung: Die durch den obigen Ausdruck definierte Menge wird *symmetrische Differenz* von A und B genannt und manchmal durch das Symbol $A \triangle B$ bezeichnet.

Lösungshinweise: Wir zeigen zunächst die Inklusion $\subseteq$ und dann die umgekehrte Inklusion $\supseteq$.
„$\subseteq$": Sei $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Ist $x \in A$, so gilt wegen $x \notin A \cap B$ schon $x \notin B$, und somit folgt $x \in A \setminus B$. Analog folgt aus $x \in B$ sofort $x \in B \setminus A$. Insgesamt ergibt dies also $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
„$\supseteq$": Sei $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Falls $x \in A \setminus B$ gilt, so folgt $x \in A \subset A \cup B$ und $x \notin A \cap B$ wegen $x \notin B$. Analog schließt man für $x \in B \setminus A$. In jedem Fall ist also $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. $\square$

Aufgabe G5 (Ungleichungen)
Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die der Ungleichung

(a)

$$\frac{1}{2}(x + 6) \geq |x + 4|,$$

(b)

$$\frac{3+|x+1|}{|x-1|} < 2$$

genügen. Berechnen Sie das Supremum und das Infimum der entsprechenden Lösungsmengen.

Lösungshinweise:

(a)

$$x \geq -4: \quad \Rightarrow \frac{1}{2}(x+6) \geq x+4 \Leftrightarrow x \leq -2.$$

Also $L_{1a} = [-4, -2]$.

$$x < -4: \quad \Rightarrow \frac{1}{2}(x+6) \geq -(x+4) \Leftrightarrow x \geq -\frac{14}{3}.$$

Also $L_{1b} = [-\frac{14}{3}, -4)$.
Lösungsmenge insgesamt: $L_1 = L_{1a} \cup L_{1b} = [-\frac{14}{3}, -2]$. $\inf L_1 = -\frac{14}{3}, \sup L_2 = -2$.

(b) <u>1. Fall</u>

$$x > 1: \quad \Rightarrow 3 + (x+1) < 2(x-1) \Leftrightarrow x > 6.$$

Also $L_{2a} = (6, \infty)$.
<u>2. Fall</u>

$$-1 \leq x < 1: \quad \Rightarrow 3 + (x+1) < -2(x-1) \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}.$$

Also $L_{2b} = [-1, -\frac{2}{3})$.
<u>3. Fall</u>

$$x < -1: \quad \Rightarrow 3 - (x+1) < -2(x-1) \Leftrightarrow x < 0.$$

Also $L_{2c} = (-\infty, -1)$.
Lösungsmenge insgesamt:

$$L_2 = L_{2a} \cup L_{2b} \cup L_{2c} = \mathbb{R} \setminus [-\frac{2}{3}, 6].$$

$\sup L_2$ und $\inf L_2$ existieren nicht.

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Regeln von de Morgan) (3 Punkte)
Es seien A, B und C beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

und

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Lösungshinweise:
„$\subseteq$": Sei $x \in A \cup (B \cap C)$. Zu zeigen ist $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Wegen $x \in A \cup (B \cap C)$ gilt $x \in A$ oder $x \in (B \cap C)$.
1. Fall: $x \in A$. Dann gilt $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$, insbesondere also $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. Fall: $x \in B \cap C$. Dann gilt $x \in B$ und $x \in C$, also ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$, insbesondere

also $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
„$\supset$“: Sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Zu zeigen ist $x \in A \cup (B \cap C)$. Im Fall, dass $x \in A$ gilt, haben wir sofort $x \in A \cup (B \cap C)$. Wir betrachten also den Fall $x \notin A$. Wegen $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$ und $x \notin A$, folgt $x \in B$ und $x \in C$. Also ist $x \in B \cap C$ und somit $x \in A \cup (B \cap C)$.
Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Der Beweis der zweiten Behauptung erfolgt analog. $\square$

Aufgabe H2 (Vollständige Induktion) (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion:

(a)
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{(n+1)}}{1-x}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \neq 1,$$

(b)
$$n^2 > 2n + 1, \qquad n \geq 3.$$

Lösungshinweise:

(a) Induktionsanfang bei $n = 1$:
$$\sum_{k=0}^{1} x^k = 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}.$$
Induktionsschritt von n auf $n+1$:
$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$
$\square$

(b) Induktionsanfang bei $n = 3$:
$$3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1.$$
Induktionsschritt von n auf $n+1$:
$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{\text{IV}}{>} 2n + 1 + 2n + 1 = 4n + 2.$$
Wegen $0 > -2n + 1$ gilt
$$4n + 2 > 4n + 2 - 2n + 1 = 2(n+1) + 1$$
und somit
$$(n+1)^2 > 2(n+1) + 1.$$
$\square$

Aufgabe H3 ((Un-)Gleichungen) (3 Punkte)

Gegeben sind die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:
$$11x = 7x - 4, \qquad |4x + 5| = 3,$$
$$x^2 - 3x - 18 \geq 0, \qquad |x+3| + |x+1| < 10.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieser Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen). Bestimmen Sie danach das Supremum und das Infimum dieser Mengen.

(b) Wie ändert sich diese Lösungsmenge, wenn man $x \in \mathbb{Q}$ (Menge der rationalen Zahlen), $x \in \mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen) bzw. $x \in \mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen) voraussetzt?

Lösungshinweise:

(a) i.

$$11x = 7x - 4 \Leftrightarrow x = -1$$

Also $L_1 = \{-1\}$. $\sup L_1 = \inf L_1 = -1$.

ii.

$$x \geq -\frac{5}{4} \Rightarrow 4x + 5 = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}; \quad x < -\frac{5}{4} \Rightarrow 4x + 5 = -3 \Leftrightarrow x = -2.$$

Also $L_2 = \{-2, -\frac{1}{2}\}$. $\sup L_2 = -\frac{1}{2}, \inf L_2 = -2$.

iii. Die Nullstellen sind $x_1 = -3, x_2 = 6$, somit ist $L_3 = \mathbb{R} \setminus (-3, 6)$. Supremum und Infimum von L_3 existieren nicht.

iv. 1. Fall

$$x \geq -1 \Rightarrow (x + 3) + (x + 1) < 10 \Leftrightarrow x < 3.$$

Also $L_{4a} = [-1, 3)$.

2. Fall

$$-3 \leq x < -1 \Rightarrow (x + 3) - (x + 1) < 10 \Leftrightarrow 2 < 10.$$

Also $L_{4b} = [-3, -1)$.

3. Fall

$$x < -3 \Rightarrow -(x + 3) - (x + 1) < 10 \Leftrightarrow -7 < x.$$

Also $L_{4c} = (-7, -3)$.

Lösungsmenge insgesamt:

$$L_4 = L_{4a} \cup L_{4b} \cup L_{4c} = (-7, 3).$$

$\sup L_4 = 3$, $\inf L_4 = -7$.

(b) Setzt man $x \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{Z}$ oder $x \in \mathbb{N}$ voraus, so ergeben sich die zugehörige Lösungsmengen durch die Schnittbildung von L_i mit $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.

i. $L_1 \cap \mathbb{Q} = L_1 \cap \mathbb{Z} = L_1$,
$L_1 \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

ii. $L_2 \cap \mathbb{Q} = L_2,\ L_2 \cap \mathbb{Z} = \{-2\}$,
$L_2 \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

iii. $L_3 \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} |\ x \leq -3 \text{ und } x \geq 6\}$, $L_3 \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} |\ x \leq -3 \text{ und } x \geq 6\}$,
$L_3 \cap \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} |\ x \geq 6\}$.

iv. $L_4 \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} |\ -7 < x < 3\}$, $L_4 \cap \mathbb{Z} = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $L_4 \cap \mathbb{N} = \{1, 2\}$.