Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 08.02.2010

Höhere Mathematik 1

14. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G40

a)

$$A + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C + C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

alle anderen Summen sind wegen der Dimensionen der Matrizen ausgeschlossen.

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad C \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

andere Kombinationen sind nicht möglich.

b)

$$BD = 0, \quad DB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad CF = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad FC = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Nein,

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &\neq A^2 + 2AB + B^2, \end{aligned}$$

da im Allgemeinen $AB \neq BA$, siehe b).

Aufgabe G41

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\varphi \circ \psi$:

$$A_\varphi \cdot A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht einer Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn.

$\psi \circ \varphi$:

$$A_\psi \cdot A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht einer Drehung um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn.

Aufgabe G42

a) Es ist
$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A =^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = A.$$

b) Wegen $A^3 = I_2$ mit der Einheitsmatrix I_2, ist $A^4 = A$, $A^5 = A^2$ und so weiter. Allgemein mit $m \in \mathbb{N}$: Falls $n = 3m$, so ist $A^n = (A^3)^m = (I_2)^m = I_2$. Falls $n = 3m+1$, so ist $A^n = AA^{3m} = A$. Falls $n = 3m+2$, so ist $A^n = A^2A^{3m} = A^2$.