Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 01.02.2010

Höhere Mathematik 1

13. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G37

a) Zeige: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + (-\lambda_2) &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $3\lambda_1 = 0$ und damit $\lambda_2 = 0$. Das zeigt, dass die 3 Vektoren linear unabhängig sind und somit bilden sie eine Basis.

b) $u_4 = 2(u_1 + u_2 + u_3)$. Da φ eine lineare Abbildung ist, gilt

$$\begin{aligned} \varphi(u_4) &= \varphi(2u_1 + 2u_2 + 2u_3) = 2\varphi(u_1) + 2\varphi(u_2) + 2\varphi(u_3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Umgekehrt gilt

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(u_1) + 2\varphi(u_2) = \varphi(u_1 + 2u_2).$$

Also ist

$$u_5 = u_1 + 2u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G38

a)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda v + \mu w) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda v_1 + \mu w_1 - \lambda v_2 - \mu w_2 \\ \lambda 2 v_2 + \mu 2 w_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 - w_2 \\ 2w_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda\varphi(v) + \mu\varphi(w), \end{aligned}$$

d.h. φ ist eine lineare Abbildung.

b)

$$\theta(v+w) = v+w+t$$

und

$$\theta(v)+\theta(w) = v+t+w+t,$$

somit ist θ im Allgemeinen ($t \neq 0$) nicht linear.

c)

$$\begin{aligned} \tau(\lambda v + \mu w) &= \alpha(\lambda v + \mu w) = \alpha\lambda v + \alpha\mu w \\ &= \lambda(\alpha v) + \mu(\alpha w) = \lambda\tau(v) + \mu\tau(w), \end{aligned}$$

d.h. τ ist eine lineare Abbildung.

d) Sei $p(x) = x^2$.

$$p(\lambda x) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2$$

und

$$\lambda p(x) = \lambda x^2,$$

d.h. im Allgemeinen ($\lambda \neq 1$) ist p nicht linear.

Aufgabe G39

a)

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ 5\lambda_1 - 10\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda_1 = -2\lambda_2$ und dies eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt $-20\lambda_2 = 0$. Also ist das Gleichungssystem nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ lösbar, die Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\begin{aligned} 2\lambda + \mu + 5\nu &= 0 \\ 4\mu + 12\nu &= 0 \\ 7\lambda - 2\mu + \nu &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\mu = -3\nu$. Dies eingesetzt in die erste Gleichung ergibt $\lambda = -\nu$. Diese Werte eingesetzt in die dritte Gleichung lösen diese und das Gleichungssystem ist bspw. für $\nu = 1$, $\mu = -3$ und $\lambda = -1$ erfüllt, die Vektoren sind nicht linear unabhängig.

c)

$$\begin{aligned} \lambda + 4\mu + 6\nu &= 0 \\ 2\lambda + 4\nu &= 0 \\ 3\lambda - 2\mu + 2\nu &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten und ersten Gleichung folgt $\lambda = -2\nu$ und $\mu = -\nu$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt nur $\nu = \mu = \lambda = 0$ als Lösung des Gleichungssystems, die Vektoren sind linear unabhängig.