Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 25.01.2010

Höhere Mathematik 1

12. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G34

a) Man berechnet zunächst die Nullstellen des Nenners und erhält $x_1 = -1$ und

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{6x-2}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \\ \frac{6x-2}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ 6x-2 &= A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2) \\ \text{Einsetzen: } x = -1 &\Rightarrow -6-2 = 2A \Rightarrow A = -4 \\ x = -2 &\Rightarrow -12-2 = -B \Rightarrow B = 14 \\ x = -3 &\Rightarrow -18-2 = 2C \Rightarrow C = -10 \\ \int \frac{6x-2}{(x+1)(x^2+5x+6)}\,dx &= \int \left(\frac{-4}{x+1} + \frac{14}{x+2} + \frac{-10}{x+3} \right) dx \\ &= -4\ln|x+1| + 14\ln|x+2| - 10\ln|x+3| + c \end{aligned}$$

b) Da der Zählergrad größer ist als der Nennergrad, macht man zunächst eine Polynomdivision und erhält

$$x^3 : (x^2 - 2x + 1) = x + 2 + \frac{3x-2}{x^2-2x+1} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{(x-1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \\ 3x-2 &= Ax - A + B \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
3 &= A \\
-2 &= -A + B \\
B &= 1 \\
\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}\, dx &= \int_{-1}^{0} \left(x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln |x - 1| - \frac{1}{x-1} \right]_{-1}^{0} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} - 2 + 3 \ln 2 + \frac{1}{2} \right) = 2 - 3 \ln 2
\end{aligned}$$

Aufgabe G35

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)^3}\, dx &= \int_0^{\infty} \frac{x+1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\, dx \\
&= \lim_{R \to \infty} \left[-\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right]_0^R \\
&= \lim_{R \to \infty} \left[-\frac{1}{R+1} + \frac{1}{2(R+1)^2} \right] + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{R \to 0} [\ln x]_R^1 = \lim_{R \to 0} (-\ln R) \to \infty,$$

d.h. das uneigentliche Integral existiert nicht.

c) Mit der Substitution $u(x) = \cos x$ und $\frac{du}{dx} = -\sin x$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx &= \int_1^{-1} -\frac{1}{u^2}\, du = \int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2}\, du \\
&= \lim_{R \to 0} \left[-\frac{1}{u} \right]_{-1}^{R} + \lim_{R \to 0} \left[-\frac{1}{u} \right]_{R}^{1} \\
&= \lim_{R \to 0} \left(-\frac{1}{R} - 1 \right) + \lim_{R \to 0} \left(-1 + \frac{1}{R} \right)
\end{aligned}$$

Diese beiden Grenzwerte existieren nicht, das Integral divergiert.

Aufgabe G36

Substitution: $u(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{8e^{3x} + 2}{e^{2x} + 2e^x + 1}\, dx &= \int \frac{8u^3 + 2}{u(u^2 + 2u + 1)}\, du \\
&= \int \frac{8u^3 + 2}{u(u+1)^2}\, du
\end{aligned}$$

Polynomdivision: $(8u^3+2):(u^3+2u^2+u) = 8 + \frac{-16u^2-8u+2}{u^3+2u^2+u}$
Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{-16u^2-8u+2}{u(u+1)^2} &= \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{(u+1)^2} = \frac{A(u+1)^2 + Bu(u+1) + Cu}{u(u+1)^2} \\
-16u^2-8u+2 &= A(u+1)^2 + Bu(u+1) + Cu \\
\text{Einsetzen: } u = 0 &\Rightarrow 2 = A \\
u = -1 &\Rightarrow -6 = -C \Rightarrow C = 6 \\
u = 1 &\Rightarrow -22 = 4A + 2B + C = 14 + 2B \Rightarrow B = -18 \\
\int \frac{8e^{3x}+2}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx &= \int \left(8 + \frac{2}{u} - \frac{18}{u+1} + \frac{6}{(u+1)^2}\right) du \\
&= 8u + 2\ln|u| - 18\ln|u+1| - \frac{6}{u+1} + c \\
&= 8e^x + 2x - 18\ln(e^x+1) - \frac{6}{e^x+1} + c
\end{aligned}$$

Hausübungen

Aufgabe H34

a) Durch Polynomdivision folgt

$$\int_4^9 \frac{x^3+x^2-8x-11}{x^2-x-6}\,dx = \int_4^9 (x+2) + \frac{1}{x^2-x-6}\,dx$$

mit den Nullstellen

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{25/4} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2},$$

des Nenners, d.h. $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$.
Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{1}{(x-3)(x+2)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \\
\Rightarrow 1 &= A(x+2) + B(x-3) = (A+B)x + 2A - 3B
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $A = \frac{1}{5}$ und $B = -\frac{1}{5}$. Also

$$\begin{aligned}
\int_4^9 \frac{x^3+x^2-8x-11}{x^2-x-6}\,dx &= \int_4^9 (x+2)\,dx + \int_4^9 \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{5}\int_4^9 \frac{1}{x+2} \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{5}\ln(x-3) - \frac{1}{5}\ln(x+2)\right]_4^9 \\
&= \frac{1}{2}9^2 - \frac{1}{2}4^2 + 2\cdot 9 - 2\cdot 4 + \frac{1}{5}\ln 6 - \frac{1}{5}\ln 11 + \frac{1}{5}\ln 6 \\
&\approx 42,7371.
\end{aligned}$$

b) Für den Nenner gilt mit der Nullstelle $x=-1$, Polynomdivision und pq-Formel

$$x^3+5x^2+7x+3 = (x+1)^2(x+3).$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{11x+17}{x^3+5x^2+7x+3} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+3} \\
11x+17 &= A(x+1)(x+3)+B(x+3)+C(x+1)^2 \\
&= A(x^2+4x+3)+B(x+3)+C(x^2+2x+1) \\
&= (A+C)x^2+(4A+B+2C)x+3A+3B+C
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $A=4$, $B=3$ und $C=-4$. Also

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{11x+17}{x^3+5x^2+7x+3}\,dx &= 4\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + 3\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - 4\int_0^1 \frac{1}{x+3}\,dx \\
&= \left[4\ln(x+1)-3\frac{1}{x+1}-4\ln(x+3)\right]_0^1 \\
&= 4\ln 2-\frac{3}{2}+3-4\ln 4+4\ln 3 \approx 3,1219.
\end{aligned}$$

Aufgabe H35

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx &= (-2)\int_0^1 \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\,dx \\
&= \left[-2\cdot\sqrt{1-x}\right]_0^1 \\
&= \lim_{R\to 1}(2-2\sqrt{1-R}) = 2
\end{aligned}$$

b) Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int e^{-2x}\cos x\,dx &= e^{-2x}\sin x + \int 2e^{-2x}\sin x\,dx \\
&= e^{-2x}\sin x + 2\cdot\left((-\cos x)e^{-2x}-\int(-\cos x)(-2)e^{-2x}\,dx\right) \\
&= e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x - 4\int \cos x e^{-2x}\,dx \\
\Rightarrow 5\int e^{-2x}\cos x\,dx &= (\sin x-2\cos x)e^{-2x} \\
\Rightarrow \int e^{-2x}\cos x\,dx &= \frac{1}{5}(\sin x-2\cos x)e^{-2x}
\end{aligned}$$

Außerdem ist $\sin R-2\cos R$ beschränkt für $R\in\mathbb{R}$ und $\lim_{R\to\infty} e^{-2R}=0$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-2x}\cos x\,dx &= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{5}(\sin x-2\cos x)e^{-2x}\right]_0^R \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{5}((\sin R-2\cos R)e^{-2R}+2) = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

c) Mit der Substitution $t(x)=e^x$ und $\frac{dt}{dx}=e^x$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx &= \int_1^e \frac{t}{t-1}\,dt = \int_1^e \frac{t-1+1}{t-1}\,dt = \int_1^e 1+\frac{1}{t-1}\,dt \\
&= \lim_{R\to 1}[t+\ln(t-1)]_R^e = \lim_{R\to 1}(e+\ln(e-1)-R-\ln(R-1))
\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, d.h. das Integral existiert ebenfalls nicht.

Aufgabe H36
Laut Skript gilt

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int dy + \frac{1}{2}\int \frac{3y^2+1}{y^4-y^2}\,dy = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\int \frac{3y^2+1}{y^2(y+1)(y-1)}\,dy$$

mit den Substitutionen $x(t) = \sinh(t)$ und $y(t) = e^t$. Für die Berechnung des zweiten Integrals benutzt man die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{3y^2+1}{y^2(y+1)(y-1)} &= \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y+1} + \frac{C}{y-1} = \frac{A(y+1)(y-1) + By^2(y-1) + Cy^2(y+1)}{y^2(y+1)(y-1)} \\
3y^2+1 &= Ay^2 - A + By^3 - By^2 + Cy^3 + Cy^2
\end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $A = -1$, $B = -2$ und $C = 2$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{3y^2+1}{y^2(y+1)(y-1)}\,dy &= -\int \frac{1}{y^2}\,dy - 2\int \frac{1}{y+1}\,dy + 2\int \frac{1}{y-1}\,dy \\
&= \frac{1}{y} - 2\ln|y+1| + 2\ln|y-1| + \tilde{c} \\
\Rightarrow \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2y} - \ln|y+1| + \ln|y-1| + c \\
&= \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - \ln|e^t+1| + \ln|e^t-1| + c
\end{aligned}$$