Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 18.01.2010

Höhere Mathematik 1

11. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G31

Der Satz von Taylor mit Lagrange-Rest sagt, dass $f(x)$ von dem N-ten Taylorpolynom

$$T_N(x, x_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

approximiert wird. Weiter gilt:

$$f(x) = T_N(x, x_0) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}$$

für ein $\xi \in [x_0, x]$ bzw. $\xi \in [x, x_0]$. Aus dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - T_N(x, x_0)| &= \frac{\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!}|x - x_0|^{N+1} \\ &\leq C\frac{|x - x_0|^{N+1}}{(N+1)!} \to 0 \text{ für } N \to \infty. \end{aligned}$$

D.h.

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} T_N(x, x_0) = T(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Aufgabe G32

a)

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \ln(x^2)\, dx &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x^2) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x^2) - \frac{2}{3}\int x^2\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x^2) - \frac{2}{9}x^3 + c. \end{aligned}$$

b) Wende zweimal partielle Integration an:

$$\begin{aligned}
\int \sin x \cdot e^x \, dx &= -\cos x \cdot e^x + \int \cos x \cdot e^x \, dx \\
&= -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \, dx \\
\Longrightarrow 2 \int \sin x \cdot e^x \, dx &= -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x + \tilde{c} \\
\Longrightarrow \int \sin x \cdot e^x \, dx &= \frac{1}{2}(-\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x) + c.
\end{aligned}$$

Aufgabe G33

a) Substituiere $y = \sin x$. Dann gilt mit $\frac{dy}{dx} = \cos x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\sin x} \, dx = \int_{y(0)}^{y(\frac{\pi}{2})} \cos x \cdot e^y \cdot \frac{1}{\cos x} \, dy = e^y|_0^1 = e - 1.$$

b) Durch Umformung und die Substitution $y = \cos x$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\ln(2 + \cos x) \cdot \sin^5 x}{3 + \cos^3 x} \, dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\ln(2 + \cos x) \cdot \sin x \cdot (1 - \cos^2 x)^2}{3 + \cos^3 x} \\
&= \int_{y(0)}^{y(2\pi)} -\frac{\ln(2 + y) \cdot \sin x \cdot (1 - y^2)^2}{3 + y^3} \cdot \frac{1}{\sin x} \, dy \\
&= \int_1^1 -\frac{\ln(2 + y) \cdot (1 - y^2)^2}{3 + y^3} \, dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hausübungen

Aufgabe H31

Mit $f(x) = \sin x$ gilt $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ usw. Im allgemeinen folgt durch Induktion $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$ und $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Also gilt

$$T(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cos x_0 (x - x_0)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sin x_0 (x - x_0)^{2k}$$

und mit $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ folgt

$$T(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 \mp \cdots$$

und die Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$, weil die Ableitungen von $\sin x$ immer $\pm \sin x$ oder $\pm \cos x$ sind und somit durch ± 1 beschränkt.

Aufgabe H32

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^{4\pi} \cos x \cdot e^x \, dx &= e^x \cdot \cos x|_0^{4\pi} - \int_0^{4\pi} -\sin x \cdot e^x \, dx \\
&= e^x \cdot \cos x|_0^{4\pi} + e^x \cdot \sin x|_0^{4\pi} - \int_0^{4\pi} \cos x \cdot e^x \, dx \\
\Longrightarrow 2 \int_0^{4\pi} \cos x \cdot e^x \, dx &= e^x \cdot (\cos x + \sin x)|_0^{4\pi} \\
\Longrightarrow \int_0^{4\pi} \cos x \cdot e^x \, dx &= \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)|_0^{4\pi} \\
&= \frac{1}{2} e^{4\pi}(1+0) - \frac{1}{2} e^0 (1+0) = \frac{1}{2} e^{4\pi} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\, dx &= \sin(3x) \cdot \frac{1}{4} \sin(4x)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 3\cos(3x) \cdot \frac{1}{4} \sin(4x)\, dx \\
&= 0 - \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos(3x) \cdot \sin(4x)\, dx \\
&= -\frac{3}{4} \cos(3x)(-\frac{1}{4} \cos(4x)|_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} -3\sin(3x) \cdot \frac{1}{4} \cos(4x)\, dx \\
&= 0 - \frac{9}{16} \int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\, dx
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (1 + \frac{9}{16}) \int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\, dx = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \sin(3x)\cos(4x)\, dx = 0.$$

Aufgabe H33

a) Substituiere $y = \ln x$. Dann gilt mit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx = \int \frac{\sin y}{x} \cdot x\, dy = \int \sin y\, dy = -\cos y + c = -\cos(\ln x) + c.$$

b) Substituiere $y = x^2 + 3x + 1$. Dann gilt mit $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+1}}\, dx &= \int \frac{2(2x+3)}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2x+3}\, dy \\
&= \int 2y^{-\frac{1}{2}}\, dy = 4y^{\frac{1}{2}} + c = 4\sqrt{x^2+3x+1} + c.
\end{aligned}$$