Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 11.01.2010

Höhere Mathematik 1

10. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G28

a) Es gilt $f'(x) = 3x^2 - 12$. Für lokale Extremwerte im Innern des Intervalls $[-5, 5]$ muss $f'(x) = 0$ sein:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12 &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Es gilt $f''(x) = 6x$, also $f''(2) > 0$ und $f''(-2) < 0$. Somit ist bei $x = 2$ ein lokales Minimum und bei $x = -2$ ein lokales Maximum. Am Rand des Intervalls $[-5, 5]$ gilt $f'(-5) > 0$ und $f'(5) > 0$, also ist f in beiden Punkten monoton steigend. Es gilt $f(-5) = -49 < 0 = f(2)$, also ist bei $x = -5$ ein globales Minimum. Es gilt $f(5) = 81 > 32 = f(-2)$, also ist bei $x = 5$ ein globales Maximum.

b) Für $x > 3$ ist $g(x) = \frac{1}{1+x-3}$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = -(1 + x - 3)^{-2} \neq 0$. Für $x < 3$ ist $g(x) = \frac{1}{1-(x-3)}$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = (1 - (x - 3))^{-2} \neq 0$. Bei $x = 3$ liegt ein lokales und globales Maximum vor, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = \frac{1}{1+|x-3|} \leq \frac{1}{1} = g(3)$. Andere Extremwerte existieren nicht.

Aufgabe G29

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $f(x) = x^3 - 9x + 4$ und $f'(x) = 3x^2 - 9$.
$x_0 = 0$, $f(0) = 4$, $f'(0) = -9$,
$x_1 = 0 + \frac{4}{9} = 0,\overline{4}$, $f(0,\overline{4}) \approx 0.0878$, $f'(0,\overline{4}) \approx -8,4074$,
$x_2 = 0,\overline{4} + \frac{0,0878}{8,4074} \approx 0.455$,
$f(x_2) \approx -0,000804$, d.h. eine gute Näherung.

Aufgabe G30

a) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= -\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \\
a_0 &= \frac{f(4)}{0!} = -2 \\
a_1 &= \frac{f'(4)}{1!} = -\frac{1}{2}4^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \\
a_2 &= \frac{f''(x)}{2!} = \frac{1}{8}4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{64}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $T_2(x) = -2 - \frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{64}(x-4)^2$.

b) Für $x \in [1,7]$ gilt

$$\begin{aligned}
|T_2(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{3!}\left(\max_{z\in[1,7]} |f'''(z)|\right)|x-4|^3 \\
&\leq \frac{1}{6}\cdot\left(\max_{z\in[1,7]} |-\frac{3}{8}z^{-\frac{5}{2}}|\right)\cdot 3^3 \\
&\leq \frac{1}{16}\cdot 1^{-\frac{5}{2}}\cdot 27 = \frac{27}{16}.
\end{aligned}$$

Hausübungen

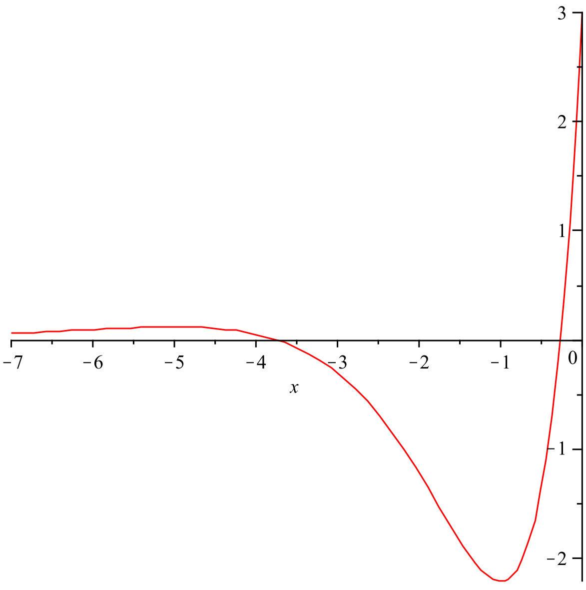
Aufgabe H28

Zur Berechnung der lokalen Extrema werden die Nullstellen der Ableitung berechnet:

$$\begin{aligned}
0 &= f'(x) = 3e^x(x^2+4x+1) + 3e^x(2x+4) \\
0 &= x^2 + 6x + 5 \\
x &= -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm 2 \\
x_1 &= -5 \\
x_2 &= -1 \\
f''(x) &= 3e^x(x^2+4x+1) + 3e^x(2x+4) + 3e^x(2x+4) + 6e^x \\
&= 3e^x(x^2+4x+1) + 6e^x(2x+4) + 6e^x \\
f''(x_1) &\approx -0,08 < 0 \qquad \text{Maximum} \\
f''(x_2) &\approx 4,41 > 0 \qquad \text{Minimum} \\
f(x_1) &= 18e^{-5} \approx 0,12 \\
f(x_2) &= -6e^{-1} \approx -2,21 \\
f(-7) &= 66e^{-7} \approx 0.06 \\
f(0) &= 3
\end{aligned}$$

Damit ist bei $x = -7$ ein lokales Minimum, bei $x_1 = -5$ ein lokales Maximum, bei $x_2 = -1$ ein globales Minimum und bei $x = 0$ ein globales Maximum.

Anmerkung: Randpunkte des Definitionsbereichs werden bei der Untersuchung von lokalen Extrema in der Literatur unterschiedlich behandelt. In manchen Büchern wird bei lokalen Extrema vorausgesetzt, dass der Punkt im Innern des Definitionsbereichs liegen muss. Nach dieser Definition liegt bei der Funktion f bei $x = -7$ kein lokales Minimum vor.



Aufgabe H29

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $f(x) = e^x + \ln x - x^2 - 2$ und $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 2x$.

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + \ln x_n - x_n^2 - 2}{e^{x_n} + \frac{1}{x_n} - 2x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} x_0 &= e \\ x_1 &\approx 2,0475 \\ x_2 &\approx 1,4988 \\ x_3 &\approx 1,2031 \\ x_4 &\approx 1,1644 \end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt bei $x_N \approx 1.164181726$.

Aufgabe H30

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2(x) \\ f'(x) &= -2\cos x \sin x \\ f''(x) &= -2\cos^2 x + 2\sin^2 x \\ f'''(x) &= 4\sin x\cos x + 4\sin x \cos x = 8\sin x\cos x \\ T_2(x) &= f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 \\ &= 1 - (x-\pi)^2 \\ |f(x) - T_2(x)| &\leq \frac{1}{3!} \cdot \left(\max_{\xi \in [3,4]} |f'''(\xi)| \right) \cdot |x-\pi|^3 \\ &\leq \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot |4-\pi|^3 \approx 0,843 \end{aligned}$$

Anmerkung: Eine bessere Abschätzung erhält man mit der Gleichung $f'''(x) = 8\sin x \cos x = 4\sin(2x)$, dann gilt $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot |4-\pi|^3 \approx 0,422$.

Zusatzaufgabe:

a) Zu zeigen ist: Für $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ gilt $f(x) = f(y)$.
Nach dem Mittelwertsatz gilt $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x)$ mit $x < \xi < y$. Nach Voraussetzung ist $f'(\xi) = 0$ und damit $f(y) = f(x)$.

b) 1. Richtung: Sei f monoton wachsend.
Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$, dass $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. Daraus folgt durch Grenzübergang $f'(x) \geq 0$.
2.Richtung: Zu zeigen ist: Für $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ gilt $f(x) \leq f(y)$.
Nach dem Mittelwertsatz gilt $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x)$ mit $x < \xi < y$ und nach Voraussetzung ist $f'(\xi) \geq 0$ mit $x \leq \xi \leq y$. Somit ist $f'(\xi)(y - x) \geq 0$ und damit $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x) \geq f(x)$.