Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 14.12.2009

Höhere Mathematik 1

9. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G25

a) Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert. Zähler und Nenner sind als Polynome stetige Funktionen. Die Funktion kann für $x \neq 1$ in der Form

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{x-1}$$

geschrieben werden. Die stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ ist $\tilde{f}(x) = x - 3$.

b) Wegen $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ hat der Nenner eine Nullstelle bei $x = 1$. Die Funktion g ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert. Für $x > 1$ gilt $g(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$, und für $x < 1$ gilt $g(x) = \frac{-(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x-1}$. Es gilt $\lim_{x \to 1} g(x) = \infty$, also ist g bei $x = 1$ nicht stetig fortsetzbar.

c) Die Funktion ist an der Stelle $x = 1$ nicht definiert und nimmt daher den Wert auch nicht an, aber die stetige Fortsetzung tut dies, wegen des Zwischenwertsatzes.

Aufgabe G26

a) $f'(x) = 15x^4 - 14(2x+3)^{13} \cdot 2 = 15x^4 - 28(2x+3)^{13}$.

b) Die Funktion g ist das Produkt der Funktionen $u(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ und $v(x) = 3x - 6x^3$ mit den Ableitungen $u'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ und $v'(x) = 3 - 18x^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(3x - 6x^3) + \sqrt[3]{x}(3 - 18x^2) \\ &= \sqrt[3]{x}\left(\frac{3x - 6x^3}{3x} + 3 - 18x^2\right) \\ &= \sqrt[3]{x}(1 - 2x^2 + 3 - 18x) \\ &= \sqrt[3]{x}(4 - 20x^2) = 4\sqrt[3]{x}(1 - 5x^2). \end{aligned}$$

c) Die Funktion ist der Quotient der Funktion $u(x) = 3x + 5$ und $x^2 - 8x + 18$ mit den Ableitungen $u'(x) = 3$ und $v'(x) = 2x - 8$. Mit der Quotientenregel folgt

$$h'(x) = \frac{u'(x) - v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3(x^2-8x+18)-(3x+5)(2x-8)}{(x^2-8x+18)^2} \\
&= \frac{3x^2-24x+54-6x^2+14x+40}{(x^2-8x+18)^2} \\
&= \frac{-3x^2-10x+94}{(x^2-8x+18)^2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe G27

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^3-x^2+x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2-2x+1} = \frac{1}{3-2+1} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot \ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\frac{1}{x}+1\cdot\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = 0.$$

c)

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot\ln(x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}\cdot x^3}{-2} = 0.$$

Hausübungen

Aufgabe H25

a) Die Funktion ist in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ definiert. Für $x>1$ ist $f(x)=x-1$ und für $x<1$ ist $f(x)=-x+1$. Die Funktion ist für $x=1$ stetig fortsetzbar, da für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ gilt: $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)| = \lim_{n\to\infty}|x_n-1| = 0$ und damit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

b) Damit g an der Stelle $x=1$ stetig ist muss $b^2\cdot 1 = -b\cdot 2^1 - 1$ gelten, also $0 = b^2+2b+1 = (b+1)^2$ und somit $b=-1$.
Damit g an der Stelle $x=3$ stetig ist, muss $-b\cdot 2^3 - 1 = b+c$ gelten, also $7=-1+c$ und somit $c=8$.

Aufgabe H26

a) $f(x) = 2^x - x^x = e^{x\ln 2} - e^{x\ln x}$.
$f'(x) = e^{x\ln 2}\cdot\ln 2 - e^{x\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = 2^x\cdot\ln 2 - x^x(\ln x+1)$.

b) $g'(x) = \frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{(-1)\cdot(1+x)-1\cdot(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$.

c) $h'(x) = 2e^{2x}\sqrt{2x} + e^{2x}\cdot\frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 = 2e^{2x}\sqrt{2x} + e^{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Aufgabe H27

Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 0}(x^3+3x^2)}{\lim_{x\to 0}(-e^{-x}-x)} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Die Berechnung von $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ erfolgt durch Anwendung der Regel von L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+6x}{e^{-x}-1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{6x+6}{-e^{-x}} = -6. \end{aligned}$$

Somit gilt $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dies ist kein Widerspruch zur Regel von L'Hospital, denn die Regel darf nur bei Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ angewendet werden.