Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
07.12.2009

Höhere Mathematik 1 - Probeklausur

Nachname	
Vorname	
Studiengang	

Matr.-Nummer		Semester	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte	6	6	4	8	6	6	36	
err. Punkte								

Falten Sie bitte vor dem Abgeben das Aufgabenblatt **HIER** und legen Sie Ihre Lösungen hinein.

Wichtig: Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes verwendete Blatt, nummerieren Sie alle Seiten.
Bearbeitungszeit: **90 Minuten**.
Alle Ergebnisse und Teilergebnisse müssen sorgfältig begründet werden.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen und Ungleichungen.

a) $|x| \leq \frac{3}{x+2}$.

b) $2^{4x} = \sqrt{8^{x+2}}$.

c) $\cos(x) + \cos(-x) + \sin(x) + \sin(-x) = 2$.

Lösung:

a) Für $x < -2$ ist die Betragsfunktion der linken Seite stets größer als 0 und der Bruch der rechten Seite negativ, so dass es in diesem Fall keine Lösung gibt. Für $x = -2$ ist der Ausdruck auf der rechten Seite nicht definiert. Für $x \in (-2, 0)$ gilt $-x \leq \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow -x(x+2) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 0$ und dies ist für alle x erfüllt, da $x^2 + 2x + 3$ ein stetiges Polynom ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$ ist. Für $x \geq 0$ gilt $x \leq \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Also ist $\{x \in \mathbb{R} | x \in (-2, 1]\}$ die Lösungsmenge der Ungleichung.

b)

$$\begin{aligned} 2^{4x} &= \sqrt{8^{x+2}} \\ 2^{8x} &= 8^{x+2} \\ 8x \ln 2 &= (x+2) \ln 8 \\ x(8 \ln 2 - \ln 8) &= 2 \ln 8 \\ x &= \frac{2 \ln 8}{8 \ln 2 - \ln 8} = \frac{6 \ln 2}{5 \ln 2} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

c) $\cos(x) + \cos(-x) + \sin(x) + \sin(-x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \sin(x) = 2\cos(x) = 2 \Rightarrow \cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2

Es sei $f : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

a) Zeigen Sie, dass f streng monoton fallend und damit umkehrbar ist.

b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f.

Lösung:

a) Für $x_1 < x_2 < -1$ gilt $x_1^2 > x_2^2 > 1 \Rightarrow x_1^2 - 1 > x_2^2 - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 - 1} > \sqrt{x_2^2 - 1}$.

b)

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 1} \\ y^2 &= x^2 - 1 \\ x^2 &= y^2 + 1 \\ x &= \pm\sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

Wegen $x < 0$ gilt $x = -\sqrt{y^2 + 1}$ und die Umkehrfunktion lautet $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$.

Aufgabe 3

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |a_n - 0| < \epsilon \; \forall n \geq n_\epsilon \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |a_n| < \epsilon \; \forall n \geq n_\epsilon \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : ||a_n|| < \epsilon \; \forall n \geq n_\epsilon \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : ||a_n| - 0| < \epsilon \; \forall n \geq n_\epsilon \\
& \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Betrachten Sie die rekursive Folge $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

c) Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung:

a) Induktionsanfang: Mit $a_1 = 0$ gilt $0 \leq a_1 \leq 1$.
Induktionsannahme: $0 \leq a_n \leq 1$ sei richtig.
Induktionsschritt: $a_{n+1} = \frac{a^2+2}{3} \leq \frac{1^2+2}{3} = 1$ bzw. $a_{n+1} = \frac{a^2+2}{3} \geq \frac{0^2+2}{3} = \frac{2}{3}$.

b) Es ist zu zeigen, dass $a_{n+1} > a_n$ und dies ist äquivalent zu $\frac{a_n^2+2}{3} > a_n$, also $a_n^2 - 3a_n + 2 \geq 0$. Die Gleichung $a_n^2 - 3a_n + 2 = 0$ hat die Lösungen $a_n = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$. Zwischen diesen beiden Werten 1 und 2 ist der Ausdruck $a_n^2 - 3a_n + 2$ negativ, ansonsten positiv. Nach a) liegt a_n außerhalb dieses Intervalls, also ist die Monotonie bewiesen.

c) Die Folge konvergiert, da sie nach oben beschränkt ist und monoton steigt.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a \\ a &= \frac{a^2+2}{3} \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die folgenden Ausdrücke auf Konvergenz. Geben Sie gegebenenfalls in a) und b) die Grenzwerte an.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n+17}{(n+1)^2}$.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$.

Lösung:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n+17}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{2}{n}+\frac{17}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 4$.

b) Die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenz von x, d.h. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$. Damit gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$. Sei nun (x_n) eine Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Für die Folge $y_n = 2\ln(x_n)$ gilt dann ebenfalls $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, da die Logarithmusfunktion streng monoton wächst mit $\ln(x) > k$ für alle $x > e^k$, wobei $k \in \mathbb{R}$ beliebig. Da $x_n^2 = e^{y_n}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} y_n e^{-y_n} = 0.$$

c)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} < 1$$

für $n > 3$. Also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 6

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 2. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

c) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\arg(z_1), \arg(z_2) \in (0, \frac{\pi}{2}) \Longrightarrow \arg(z_1 \cdot z_2) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion $\Longrightarrow f(0) = 0$.

Lösung:

a) Wahr.

b) Falsch. Gegenbeispiel: $a_n = \frac{1}{n}$.

c) Falsch. Gegenbeispiel: $z_1 = z_2 = 1 + i$.

d) Wahr.