Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 30.11.2009

Höhere Mathematik 1

7. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G19

a) Minorantenkriterium: Es gilt $\frac{n}{4n^2+n} = \frac{1}{4n+1} \geq \frac{1}{5n}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, also divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+n}$.

b) Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} < 1$, da $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. Damit konvergiert die Reihe absolut.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)+\sin(n\pi)}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe, da $a_n = \frac{1}{n}$ eine monoton fallende, nichtnegative Nullfoge bildet (alternierende harmonische Reihe). Allerdings konvergiert sie nicht absolut.

Aufgabe G20

a) Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{4}{4^n}x^{2n} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{4}x^2)^n$, und diese geometrische Reihe konvergiert für $-\frac{1}{4}x^2 \in (-1,1)$, also für $x \in (-2,2)$. Außerhalb dieses Intervalls divergiert die Reihe.

b) Quotientenkriterium: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)n}}{\frac{x^n}{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(n-1)}{n+1} = x$. Somit konvergiert die Reihe für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Für $x = \pm 1$ gilt $|\frac{x^n}{n(n-1)}| \leq \frac{1}{(n-1)(n-1)}$, also konvergiert in diesem Fall die Reihe nach dem Majorantenkriterium, denn die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Aufgabe G21

a) $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^n}{n!}\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2} \to \infty$ für $n \to \infty$. Also konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Es gilt $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1}x^{2n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}x^{2n}$ und damit $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n}{n-1} \to 1$ für $n \to \infty$. Somit konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 < 1$, d.h. $|x| < 1$.
Untersuche das Verhalten der Reihe auf den Rändern des Konvergenzintervalls, d.h. für $x^2 = 1$:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}1^{2n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$
Dies ist die harmonische Reihe, somit divergiert die Reihe für x^2=1.

Hausübungen

Aufgabe H19

a) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + 1 = 1 \neq 0$. Damit divergiert die Reihe.

b) Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{4n+2} \to \frac{1}{4} < 1$ für $n \to \infty$. Also konvergiert die Reihe absolut.

c) Es gilt folgende Abschätzung: $\left|\frac{k+1}{k^3+k^2+1}\right| \leq \frac{k+k}{k^3} = \frac{2}{k^2}$. Damit ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ eine konvergente Majorante der Reihe.

Aufgabe H20

Eine Partialbruchzerlegung liefert:

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2k-1}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Damit gilt für die n-te Partialsumme:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).\end{aligned}$$

Damit ist der Grenzwert bestimmbar als

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe H21

a) $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$. Also ist der Konvergenzradius 0 und die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$.

b) $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = \frac{2n+2}{n} \to 2$ für $n \to \infty$. Also ist der Konverhenzradius 2 und die Reihe konvergiert auf jeden Fall für $|x| < 2$ und divergiert für $|x| > 2$.
Untersuchung der Randpunkte:
$x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (harmonische Reihe).
$x = -2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent (alternierende harmonische Reihe).
Also konvergiert die Reihe für $x \in [-2, 2)$.

c) $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^n((n+1)^2+1)}{(n^2+1)2^{n+1}} \frac{n^2+2n+2}{2n^2+2} \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$. Also ist der Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ und die Reihe konvergiert auf jeden Fall für $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
Untersuchung der Randpunkte: $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$: $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}(\frac{1}{2})^n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ und da $\frac{1}{n^1+1} < \frac{1}{n^2}$ konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium.
$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$: $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ und diese Reihe konvergiert ebenfalls (s.o.).
Insgesamt konvergiert die Reihe für $x \in [-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n} x^n$.