Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 23.11.2009

Höhere Mathematik 1

6. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G16

a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5(n^2+4n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}}{5+\frac{20}{n}} = \frac{1}{5}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+(-5)^n}{5^n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{4}{5})^n+(-1)^n}{1+\frac{6}{5^n}}.$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, da alle Teile konvergieren, nur $(-1)^n$ nicht. Die Folge hat zwei Häufungspunkte.

c)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left((1+\frac{1}{n})^n\right)^2 = e^2.$$

Aufgabe G17

a) $a_0 = 7$,
$a_1 = \frac{1}{2}(7+\frac{7}{7}) = \frac{8}{2} = 4$,
$a_2 = \frac{1}{2}(4+\frac{7}{4}) = 2,875$,
$a_3 = 2,6548\ldots$,
$a_4 = 2,64576\ldots$.

b) $a_1 > 0$ und damit ist mit $a_n > 0$ auch $a_{n+1} > 0$, da alle Faktoren des Ausdrucks > 0 sind. Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 0 nach unten beschränkt.

c)

$$\begin{aligned} a_n^2 - 7 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(a_{n-1} + \frac{7}{a_{n-1}}\right)^2 - 7 = \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + 14 + \frac{49}{a_{n-1}^2}\right) - 7 \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 - 14 + \frac{49}{a_{n-1}^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{7}{a_{n-1}}\right)\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Induktionsanfang: Es ist $a_0 = 7$ und $a_1 = 4$, d.h. $a_1 \leq a_0$.
Induktionsannahme: $a_n \leq a_{n-1}$ sei richtig.
Induktionsschritt: Zu zeigen: $a_{n+1} \leq a_n$, d.h.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) \leq a_n \Leftrightarrow a_n^2 + 7 \leq 2a_n^2 \Leftrightarrow 7 \leq a_n^2.$$

Dies ist aber nach obiger Rechnung richtig, also fällt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton.

d) Die Folge konvergiert, da sie beschränkt nach unten ist und monoton fällt.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a \\ a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{7}{a}\right) \Leftrightarrow 2a = a + \frac{7}{a} \Leftrightarrow 2a^2 = a^2 + 7 \Leftrightarrow a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7}.\end{aligned}$$

Aufgabe G18

a)

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{7n+2} - \sqrt{7n} = \frac{(\sqrt{7n+2} - \sqrt{7n})(\sqrt{7n+2} + \sqrt{7n})}{\sqrt{7n+2} + \sqrt{7n}} \\ &= \frac{7n+2-7n}{\sqrt{7n+2} + \sqrt{7n}} = \frac{2}{\sqrt{7n+2} + \sqrt{7n}} \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

b) $b_n = n2^{-n}$. Es ist klar, dass $b_n \geq 0$ ist. Für die Monotonie gilt:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} < 1$$

für $n > 1$. Es folgt, dass b_n von unten beschränkt ist und monoton fallend mit $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2}$, also $b_n \to 0$ für $n \to \infty$.

c) $c_n = \frac{\pi^n}{n!}$ und $\frac{\pi}{k} < 1$ für alle $k \geq 4$, also gilt

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{\pi^n}{n!} = \frac{\pi \cdots \pi}{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1} = \frac{\pi}{n}\left(\frac{\pi}{n-1} \cdots \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{3}\frac{\pi}{2}\pi \\ &< \frac{\pi}{n}\frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^4}{6n} \to 0,\end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

d) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, also gilt $d_n = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$.

Hausübungen

Aufgabe H16

a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$$

existiert nicht, da $(-1)^n$ nicht konvergiert, aber $\frac{1}{n}$. Als Häufungspunkte ergeben sich 1 und -1.

b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{n}-\frac{2n^3+2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2+n-2n^3-2}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)=1.\end{aligned}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6^n+(-5)^n}{5^n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{6}{5})^n+(-1)^n}{1+\frac{6}{5^n}}$$

existiert nicht, da $(\frac{6}{5})^n\to\infty$.

Aufgabe H17

$c_1=1$, $c_2=\sqrt{2}$, $c_3=\sqrt{1+\sqrt{2}}=1,5537\ldots$
Vermutung: c_n steigt monoton.
Induktionsanfang: $c_1\le c_2$.
Induktionsannahme: $c_{n-1}\le c_n$.
Induktionsschritt: $c_n=\sqrt{1+c_{n-1}}\le\sqrt{1+c_n}=c_{n+1}$.
Für die Beschränktheit gilt:

$$c_n\le 2\Leftrightarrow\sqrt{1+c_{n-1}}\le 2\Leftrightarrow 1+c_{n-1}\le 4\Leftrightarrow c_{n-1}\le 3$$

(mit Induktion sieht man $c_1<2\Rightarrow c_2<2\Rightarrow\ldots$)
Für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n=c=\lim_{n\to\infty} c_{n+1}$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{1+c}\Leftrightarrow c^2-1-c=0\Rightarrow c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe H18

a)

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\\ &= \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\to\frac{1}{1+\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

für $n\to\infty$.

b) $b_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}$ und $\frac{k}{n}<1$ für $k=2,\ldots,n-1$, also gilt $0<b_n<1^{n-2}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\to 0$ und $b_n\to 0$ für $n\to\infty$.

c) Aus H3 ist bekannt, dass $\sum_{k=1}^n k^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$, also ist $c_n=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6n^3}=\frac{n^3}{n^3}\frac{(2+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{6}=\frac{(2+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{6}\to\frac{2\cdot 1}{6}=\frac{1}{3}$ für $n\to\infty$.

d) $d_n = n^k 2^{-n}$. Dann gilt $d_n \geq 0$ und

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k,$$

also gilt $\frac{d_{n+1}}{d_n} < 1$ genau dann, wenn $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 2 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} < \sqrt[k]{2} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt[k]{2}-1}$. Für $n > N > \frac{1}{\sqrt[k]{2}-1}$ ist die Folge also monoton fallend und deswegen konvergent für jedes $k \in \mathbb{N}$.