Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 16.11.2009

Höhere Mathematik 1

5. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G13

a) $\tan^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1 = \sin^2 x + \cos^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x = \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ bzw. $\sin^2 x(2 - \frac{2}{\cos^2 x}) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

b) Die erste Lösung erhält man, indem man nach z auflöst:

$$\begin{aligned} z &= \left(2 + 3i + \frac{1}{i}\right)/(3+i) \\ &= \frac{2+3i-i}{3+i} \\ &= \frac{2+2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} \\ &= \frac{6+2+(-2+6)i}{10} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i. \end{aligned}$$

Hiermit kann man die gefragten Werte folgendermaßen ablesen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \frac{4}{5}. \\ \mathrm{Im}(z) &= \frac{2}{5}. \\ |z| &= \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{20}}{5}. \end{aligned}$$

Für die zweite Lösung ist es hilfreich Polarkoordinaten zu verwenden. Mit $|i| = 1$ und $\arg(i) = \pi/2$ gilt

$$z^4 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

und damit

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}.$$

Aufgabe G14
Es gilt $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Daraus folgt $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ und $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{1}{4i}(e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + \frac{1}{4i}(e^{iy} - e^{-iy})(e^{ix} + e^{-ix}) \\
&= \frac{1}{4i}\big(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} - e^{i(y-x)} - e^{-i(x+y)} \\
&\quad + e^{i(x+y)} + e^{i(y-x)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x+y)}\big) \\
&= \frac{1}{4i}\big(2e^{i(x+y)} - 2e^{-i(x+y)}\big) \\
&= \frac{1}{2i}\big(e^{i(x+y)} - e^{-(x+y)}\big) = \sin(x+y)
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y - \sin x \sin y &= \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + \frac{1}{4}(e^{iy} - e^{-iy})(e^{ix} - e^{-ix}) \\
&= \frac{1}{4}\big(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{i(y-x)} + e^{-i(x+y)} \\
&\quad + e^{i(x+y)} - e^{i(y-x)} - e^{i(x-y)} + e^{-i(x+y)}\big) \\
&= \frac{1}{4}\big(2e^{i(x+y)} + 2e^{-i(x+y)}\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(e^{(i(x+y)} + e^{-i(x+y)}\big) = \cos(x+y).
\end{aligned}$$

Aufgabe G15

a) Mit der Stoßanregung und den Reibungsverlusten ergibt sich

$$E_{n+1} = (E_n + 1) \cdot \frac{96}{100} = \frac{24}{25}(E_n + 1).$$

b) Zum Nachweis, dass die Folge beschränkt ist, dient vollständige Induktion. Als Induktionsanfang ist $E_1 = 0 \leq 24$ eine wahre Aussage. Nun gelte die Induktionsannahme $E_n \leq 24$. Im Induktionsschritt ist $E_{n+1} \leq 24$ zu zeigen. Dies folgt mit

$$E_{n+1} = \frac{24}{25}(E_n + 1) \leq \frac{24}{25}(24 + 1) = 24.$$

Zum Nachweis, dass die Folge monoton wächst, muss $E_{n+1} \geq E_n$ gelten. Dies ist wegen $-E_n \geq -24$ und

$$E_{n+1} = \frac{24}{25}E_n + \frac{24}{25} = E_n - \frac{1}{25}E_n + \frac{24}{25} \geq E_n - \frac{1}{25} \cdot 24 + \frac{24}{25} = E_n$$

der Fall.

Hausübungen

Aufgabe H13

a)

$$2x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm i\sqrt{\frac{7}{4}}$$

Die Nullstellen von Q sind also $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{7}$ und $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{7}$.

$$3x^2 - 3x + 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 6} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{23}{4}}$$

Die Nullstellen von R sind also $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{23}$ und $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{23}$.

b) $P(x) = x(x-1)(x-2) = x(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

c) Es gilt $u = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$. Damit folgt

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2u\cos^2\frac{x}{2}$$

und

$$u^2 + 1 = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$\Rightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{u^2+1} \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{u^2+1} + 1 = \frac{1-u^2}{u^2+1} \Rightarrow$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2},$$
$$\cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1}.$$

Aufgabe H14

a) Zunächst werden z_1 und z_2 eingesetzt,

$$\begin{aligned} z_3 &= \bar{z}_1 \cdot z_2 \\ &= (1-2i)(2-3i) \\ &= 2 - 6 - 4i - 3i \\ &= -4 - 7i. \end{aligned}$$

Hier lassen sich die gefragten Werte ablesen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_3) &= -4. \\ \mathrm{Im}(z_3) &= -7. \\ |z_3| &= \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{65}. \end{aligned}$$

b) Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{z_1}{\bar{z}_2} \\ &= \frac{1+2i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} \\ &= \frac{2+6+4i-3i}{4+9} \\ &= \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i. \end{aligned}$$

Hier lassen sich die gefragten Werte ablesen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_4) &= \frac{8}{13}. \\ \mathrm{Im}(z_4) &= \frac{1}{13}. \\ |z_4| &= \frac{\sqrt{8^2+1^2}}{13} = \frac{\sqrt{65}}{13}. \end{aligned}$$

c) Es ist hilfreich Polarkoordinaten zu verwenden. Mit $|1+i| = \sqrt{2}$ und $\arg(1+i) = \pi/4$ gilt mit Hilfe der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} z_5 &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{20} \\ &= \sqrt{2}^{20}\left(\cos\frac{20\pi}{4} + i\sin\frac{20\pi}{4}\right) \\ &= 2^{10}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) \\ &= -1024. \end{aligned}$$

Hier lassen sich die gefragten Werte ablesen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_5) &= -1024. \\ \mathrm{Im}(z_5) &= 0. \\ |z_5| &= 1024. \end{aligned}$$

Aufgabe H15

a) An den ersten Folgegliedern lässt sich das rekursive Bildungsgesetz

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$$

ablesen.

b) Wir zeigen $a_n \leq 3$ durch vollständige Induktion:

$$a_1 = \sqrt{6} \leq 3.$$

Induktionsannahme: $a_n \leq 3$.

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \leq \sqrt{6+3} = 3.$$

c) Wir zeigen $a_{n+1} \geq a_n$. Wegen $a_n \geq 0$ ist dies äquivalent zu $6+a_n \geq a_n^2$, also $a_n^2-a_n-6 \leq 0$. Die Gleichung $a_n^2 - a_n - 6 = 0$ hat die Lösungen $a_n = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$. Zwischen diesen beiden Werten -2 und 3 ist der Ausdruck $a_n^2 - a_n - 6$ negativ, außer halb dieses Intervalls ist der Ausdruck positiv. Nach Aufgabenteil b) liegt a_n innerhalb dieses Intervalls, also gilt $a_n^2 - a_n - 6 \leq 0$, und die Monotonie ist bewiesen.