Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 09.11.2009

Höhere Mathematik 1

4. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G10

a) Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert.

b) Wegen $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ hat der Nenner Nullstellen bei $x = 1$ und bei $x = -1$, d.h. die Funktion g ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ definiert.

Aufgabe G11

a) Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $f(n) = 3n$ durch drei teilbar. Aber es ist bspw. $2 \notin B(f)$, also ist ist f nicht surjektiv. $f(n) = f(m) \Leftrightarrow 3n = 3m \Leftrightarrow n = m$, also ist f injektiv.

b) $g(x) = g(y) \Leftrightarrow 3x = 3y \Leftrightarrow x = y$, also ist g injektiv. Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist $g(\frac{y}{3}) = y$, also ist g auch surjektiv und damit bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $g^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

c) $h(n) = h(m) \Leftrightarrow 2n = 2m \Leftrightarrow n = m$, also ist h injektiv. Für jedes gerade $m = 2k$ gilt $h(k) = h(\frac{m}{2}) = m$. Also ist h surjektiv und auch bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $h^{-1}(m) = \frac{m}{2}$.

d) i ist injektiv, aber nicht surjektiv, da es kein ungerades $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass bspw. $2k = 4$ ($4/2 = 2$ ist gerade).

Aufgabe G12

a) f hat keine Umkehrfunktion, da $f(1) = 1 = f(-1)$.

b) Die Funktion g ist in Intervall $[-5, 5]$ streng monoton fallend, also existiert eine Umkehrfunktion. Löse die Gleichung $y = e^{-4x+2} - 3$ nach x auf.

$$\begin{aligned} y &= e^{-4x+2} - 3 \\ \ln(y+3) &= -4x + 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(y+3) &= x \\ g^{-1}(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(x+3) \end{aligned}$$

Der Definitionbereich von g^{-1} ist der Wertebereich von g, also gilt $D_{g^{-1}} = [g(-5), g(5)] = [e^{22} - 3, e^{-18} - 3]$.

Hausübungen

Aufgabe H10

a) Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ definiert.

b) Die Funktion g ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert.

c) Wegen $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ hat der Nenner eine Nullstelle bei $x = 1$ und bei $x = 2$, d.h. die Funktion h ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ definiert.

Aufgabe H11

a) Die Funktion f ist im Intervall $[1, 3]$ streng monoton steigend, also existiert eine Umkehrfunktion. Es gilt $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$. Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f, also gilt $D_{f^{-1}} = [f(1), f(3)] = [1, 81]$.

b) Die Funktion g ist im Intervall $[-2, 0]$ streng monoton fallend, also existiert eine Umkehrfunktion.

$$\begin{aligned} y &= \ln(x^2+1) \\ e^y - 1 &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{e^y - 1} \end{aligned}$$

Wegen $x \le 0$ gilt $x = -\sqrt{e^y - 1}$, also ist $g^{-1}(x) = -\sqrt{e^x - 1}$ die Umkehrfunktion. Der Definitonsbereich von g^{-1} ist der Wertebereich von g, also gilt $D_{g^{-1}} = [g(0), g(-2)] = [0, \ln 5]$.

c) h hat keine Umkehrfunktion, da $h(2) = 4 = h(4)$.

Aufgabe H12

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} &= \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \\ x - 1 + x + 1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} &= y - 1 + y + 1 + 2\sqrt{y-1}\sqrt{y+1} \\ 2x + 2\sqrt{x^2-1} &= 2y + 2\sqrt{y^2-1} \\ x - y &= \sqrt{y^2-1} - \sqrt{x^2-1} \\ x^2 + y^2 - 2xy &= x^2 - 1 + y^2 - 1 - 2\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} \\ \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} &= xy - 1 \\ (x^2-1)(y^2-1) &= (xy-1)^2 \\ x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 &= x^2y^2 - 2xy + 1 \\ 0 &= x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2, \end{aligned}$$

also folgt, dass $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Also ist f injektiv.

b) Die Funktion f ist im Intervall $[1, 10]$ streng monoton steigend.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \\ y^2 &= x - 1 + x + 1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} \\ y^2 &= 2x + 2\sqrt{x^2-1} \\ y^2 - 2x &= 2\sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y^4 + 4x^2 - 4xy^2 &= 4x^2 - 4 \\
y^4 + 4 &= 4xy^2 \\
x &= \frac{y^4+4}{4y^2} = \frac{y^2}{4} + \frac{1}{y^2}.
\end{aligned}
$$

Also ist $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}$. Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f, also gilt $D_{f^{-1}} = [f(1), f(10)] = [\sqrt{2}, \sqrt{9} + \sqrt{11}]$.